



Lehrbuch

der

Mechanik

und ihrer Anwendungen

auf das

Ingenieurwesen,

von

J. B. Belanger,

(Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'Ecole des Ponts et Chaussées et à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures à Paris)

Deutsch

von

Dr. B. Gugler,

Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Erster Theil.

Allgemeine Dynamik und Statik. — Hydrostatik.

Ludwigsburg.

Verlag von Adolph Neubert.

1848.

Lehrbuch der Mechanik.

Erster Theil.

Lehrbuch
der
Mechanik
und ihrer Anwendungen
auf das
Ingenieurwesen,

von

J. B. Belanger,
(Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur de Mécanique à l'Ecole des Ponts et Chaussées et à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures à Paris.)

Deutsch
von

Dr. V. Gugler,
Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Erster Theil.
Allgemeine Dynamik und Statik. — Hydrostatik.

Mit zwei Kupfertafeln.

Ludwigsburg.
Verlag von Adolph Neubert.
1848.



Druck der J. G. Sprandel'schen Buchdruckerei in Stuttgart & Cannstatt.

Vorwort des Uebersetzers.

Das vom Verfasser in seiner Vorrede erwähnte vorbereitende Werkchen (Résumé de leçons de géométrie analytique et de calcul infinitésimal) ist das kleine Buch, das ich schon früher unter dem Titel: „Grundlehren der ebenen Trigonometrie, analytischen Geometrie und Infinitesimalrechnung (Stuttgart, 1847)" in's Deutsche übertragen habe. Aus der guten Aufnahme, welche dieses Büchlein gefunden hat, entsprang eine äußere Veranlassung, auch die deutsche Bearbeitung der Mechanik*) zu übernehmen, deren empfehlende Eigenthümlichkeiten zum Theil in Belanger's Vorrede angedeutet sind, für einen mit dem Gegenstande vertrauten Leser aber im Buche selbst noch besser hervortreten werden, namentlich in den beiden späteren (bis jetzt nur als lithographirte Hefte vorliegenden) Theilen, wo die Anwendungen in höchst eleganter und klarer Weise zur Abhandlung kommen.

Besondern Dank dürfte sich Belanger bei manchem nach wissenschaftlicher Bildung strebenden Techniker dadurch verdienen, daß er in Betreff der mathematischen Vorkenntnisse nur mäßige Anforderungen stellt, ohne sich jedoch dadurch auf eine sogenannte populäre Darstellung (welche heutzutage dem Ingenieur nicht mehr genügen kann) zurückgedrängt zu sehen, da er das vorausgesetzte Material äußerst geschickt zu verwenden weiß. Reiferen Jüngern der Wissenschaft kann vielleicht Belanger's Buch als Brücke zu den so hoch zu stellenden Werken von Coriolis dienen, oder wenigstens die Neigung zum Studium derselben erwecken; und diese Hoffnung hat mit beigetragen, mich zur Uebernahme der Uebertragung zu bestimmen.

*) Cours de Mécanique, ou résumé de leçons sur la Dynamique, la Statique, et leurs applications à l'art de l'Ingénieur; par Belanger etc. — Première partie; Paris 1847.

Für einige neuere Begriffe, welche den Franzosen meist schon geläufig geworden, in deutschen Werken über Mechanik aber noch nicht eingebürgert sind, mußte ich entsprechende deutsche Namen annehmen. Gegen den Ausdruck Antrieb (impulsion) wird kein Einwand zu erheben sein. Für roideur de ressort (in Beziehung auf die Längsfederung eines elastischen Stabes, S. 91) wählte ich Straffheit. Entraînement habe ich durch Transport ersetzt. Am liebsten hätte ich dafür „Entführung" gesagt, wenn das Wort nicht naheliegende Bedenken gegen sich hätte. *) Aus ähnlichen Gründen war das an sich passende deutsche Wort Vermögen (für puissance, S. 46 2c.) nicht wohl als stehende Benennung zu brauchen, weshalb ich zu Potenz griff. Ob diese Namen befriedigen werden, muß ich dahingestellt sein lassen; ich fand keine bessern, und hatte keine Vorgänge. **)

Obgleich unser deutsches Wort „fest" gewöhnlich sowohl für solide als für fixe gesetzt wird, glaubte ich doch, der Deutlichkeit willen blos eine dieser Bedeutungen daran knüpfen zu sollen, und gebrauchte es deßhalb nur im Sinne von unbeweglich. Wenn ich für corps solide die Uebersetzung „starrer Körper" vorzog, so bedarf es wohl kaum der Bemerkung, daß damit blos der Aggregatzustand im Allgemeinen und keine absolute Starrheit gemeint sei, vielmehr im Innern eines starren Körpers noch recht wohl gewisse Vibrationsbewegungen oder kleine Verschiebungen seiner Theilchen stattfinden können.

Im Hinblick auf die französischen Maße und Gewichte (deren Beibehaltung sich von selbst verstand) bemerke ich noch, daß ich am Schlusse des ganzen Werks eine kleine Reductionstafel beizugeben gedenke, welche zugleich eine Zusammenstellung der wichtigsten Constanten 2c. enthalten soll.

Die mit GL. versehenen Citate beziehen sich auf Nummern der obengenannten „Grundlehren 2c."

Gugler.

---

*) Uebrigens mag der Gedanke an dieses Wort dazu behülflich sein, die Bedeutung der von Belanger gebrauchten und in der Uebersetzung beibehaltenen Bezeichnungen V_e, F_e (S. 24, 157 2c.) unmittelbar in Erinnerung zu bringen.

**) Die Begriffe travail moteur und travail résistant (S. 40) würden sich ziemlich bezeichnend durch Vorschub und Eintrag, oder, wenn man das Wort Arbeit nicht verlieren will, durch fördernde und hemmende Arbeit wiedergeben lassen. Aus Besorgniß, es möchten solche Namen gesucht klingen, hielt ich mich an die (für deutsche Form nur etwas ungefügen) wörtlichen Uebersetzungen.

Vorrede des Verfassers.

Der vorliegende Band enthält den kurzgefaßten Text der mündlichen Vorträge über rationelle Mechanik, welche seit 1838 den Zöglingen der Centralschule für Künste und Gewerbe je im ersten Jahre ihres Studiums ertheilt werden, als Vorbereitung für die weiteren Entwickelungen dieser Wissenschaft, und für deren Anwendung auf Constructionslehre, auf die Hydraulik und die Berechnung des Effects der Maschinen. Er bildet den ersten Theil eines Lehrcurses, dessen beide andern Theile die specielle Mechanik starrer oder biegsamer Körper und die Hydraulik zum Gegenstande haben werden, und welche ich zu veröffentlichen gedenke, sobald es mir möglich geworden sein wird an die lithographirten, bis jetzt nur für den ausschließlichen Gebrauch meiner Zuhörer eingerichteten Blätter die letzte Hand zu legen.

Dieser erste Theil handelt von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung und des Gleichgewichts der durch Kräfte angegriffenen Körper, indem er die Hauptlehren der Dynamik, der Statik und Hydrostatik erläutert.

Der ältere und noch jetzt ziemlich allgemein befolgte Gebrauch, das Studium der Mechanik mit der Statik zu beginnen, führt den bedenklichen Mißstand herbei, daß er den Anfänger an eine zu abstracte Auffassung der Kräfte gewöhnt, bei welcher die Bedingungen ihrer Existenz und ihrer Wirksamkeit unberücksichtigt bleiben. Eine glückliche Abweichung vom frühern Wege hat Poncelet durchgeführt, dessen scharfsinnige und fruchtbringende Arbeiten ihn an die Spitze einer neuen Schule der industriellen Mechanik stellen. In einem öffentlichen Lehrcurse, den er 1827 für die Arbeiter und Techniker von Metz gab, gründete er seine Belehrungen auf die Principien der Dynamik, so wie er sie in seiner Einleitung in die industrielle Mechanik*) niedergelegt hat. Coriolis — ein Geist von seltener Klarheit und Schärfe, dessen Laufbahn leider durch Kränklichkeit und einen frühzeitigen Tod zu bald ihr Ende finden mußte — befolgte den nämlichen Gang in

*) Introduction à la Mécanique industrielle, physique ou expérimentale.

seiner allgemeinen Mechanik starrer Körper,*) indem er die Bedingungen des Gleichgewichts als einen besondern Fall der Dynamik betrachtete und aus den Bewegungsgesetzen ableitete.

Die Schriften dieser beiden gelehrten Ingenieure (meiner Freunde und ehemaligen Genossen an der polytechnischen Schule), sowie der persönliche Umgang mit ihnen, haben mich vielfach gefördert und aufgeklärt. Ich verfuhr nach ihrem Beispiele, ohne jedoch mich völlig an die Methode des Einen oder des Andern zu binden.

Bei meinen Lesern setze ich mehr mathematische Vorbildung voraus als die meisten Theilnehmer an dem öffentlichen Lehrcurse zu Metz besaßen; aber weit weniger als das Lehrbuch der Mechanik von Coriolis oder andere für die Zöglinge der polytechnischen Schule bestimmte Werke verlangen. Ich berufe mich in der Regel auf die Trigonometrie, auf die Darstellung der Curven durch ihre Gleichungen, auf die Elemente der Differential- und Integralrechnung; diese Vorkenntnisse lassen sich aber bei fleißigem Studium in einigen Monaten erwerben. Ich habe die Auseinandersetzung derselben in einem kleinen Buche**) vorangeschickt, auf welches ich an mehreren Stellen des gegenwärtigen Werkes zurückverweise.

Dieß ist die Basis, auf welcher ich ein klares und logisches Lehrgebäude der rationellen Mechanik aufzuführen bemüht gewesen bin. Anfangs aus reintheoretischem Gesichtspuncte behandelt, soll die rationelle Mechanik späterhin als Führer für die practische oder industrielle Mechanik dienen. Die mathematische Strenge gewährt bei solchen Studien nicht blos eine würdige Uebung des Geistes; vielmehr halte ich die Begründung durch Mathematik vornehmlich deßhalb für höchst ersprießlich, weil (wie nur zu viele Beispiele zeigen) unbewiesene Wahrheiten leicht vergessen, oder falsch ausgelegt und am unrechten Orte angewendet werden.

Jede Wissenschaft hat ihre Axiome oder Grundprincipien. Ich habe hervorzuheben gesucht, welche Principien die rationelle Mechanik in Anspruch nimmt; die Anzahl derselben reducirt sich auf drei, nämlich: das Princip der Trägheit (S. 33), das Princip der relativen Bewegungen (S. 70), und das Princip der gleichen Gegenwirkung (S. 168).

Das Princip der Trägheit ist eng verknüpft mit dem Begriffe der Kraft.

Das Princip der relativen Bewegungen führt mit ebensoviel Strenge

*) Mécanique générale des corps solides.

**) Résumé de leçons de géometrie analytique et de calcul infinitésimal; Paris, 1842

als Leichtigkeit zu dem Satze, daß sich die Kräfte verhalten wie die Beschleunigungen welche sie einem und demselben Körper ertheilen, und zu dem Lehrsatze über die Zusammensetzung der Kräfte, welcher unter dem Namen des Satzes vom Kräfte-Parallelogramm bekannt ist. Allerdings beweisen andere Autoren diesen berühmten Satz ohne das erwähnte Princip auszusprechen, sind aber dabei gezwungen, entweder förmlich oder stillschweigend irgend ein anderes Axiom von ähnlicher Bedeutung zuzugestehen, wie etwa das folgende: Wenn mehr als zwei Kräfte gleichzeitig auf einen materiellen Punct wirken, so ist die Resultante aus zweien von ihnen die nämliche als wenn die andern nicht vorhanden wären.

Das Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung gestattet, die allgemeinen Lehrsätze über Bewegung und Gleichgewicht beliebiger Körper in der Art zu beweisen, daß man diese Körper als Aggregate von Elementen betrachtet, auf deren jedes die früher festgestellten Sätze, welche zusammen die Dynamik des materiellen Puncts ausmachen, Anwendung finden.

Unter den wissenschaftlichen Wahrheiten, welche das Besitzthum der rationellen Mechanik bilden und in verschiedenen, mit Recht hochgeschätzten Werken niedergelegt sind, mußte ich eine den Bedürfnissen meiner Zöglinge angepaßte Auswahl treffen. Ich übergieng die an sich so anziehende Theorie der elliptischen Bewegung der Planeten, sowie die verschiedenen Untersuchungen über die augenblicklichen Rotationsaxen freier fester Körper. Dagegen ließ ich nichts bei Seite, was mit der Theorie von der Arbeit der Kräfte zusammenhängt, da diese Theorie, wegen ihrer Anwendung auf die Berechnung des Effects der Maschinen, so wichtig ist. Ich habe gezeigt, daß die Größe, welche von Coriolis und Poncelet den treffend gewählten Namen Arbeit erhalten hat, sich auf die einfachste Weise in die Rechnung einführen läßt, wenn man aus den beiden Gleichungen für die gleichförmig veränderte Bewegung, welche die Relationen zwischen der Kraft, der veränderlichen Geschwindigkeit, dem durchlaufenen Raume und der Zeit ausdrücken, die letztere Veränderliche (die Zeit) eliminirt (S. 82). Uebrigens glaubte ich dem späteren speciellen Studium der Maschinentheorie den Nachweis überlassen zu dürfen, inwiefern die Arbeit der Kräfte, nach einem Ausdrucke Navier's, eine Art von mechanischem Gelde ist. Bis dahin gilt die Arbeit für eine theoretische Combination einer Kraft mit dem von ihrem Angriffspuncte durchlaufenen Weg und dem Winkel, den die Richtung der Kraft gegen den Weg bildet.

Um bei Annahme des Namens Arbeit, in dem bestimmten Sinne der ihm heutzutage in der Mechanik beigelegt wird, consequent zu bleiben, bediene ich mich des Ausdrucks virtuelle Arbeit, statt der von Lagrange gebrauchten Benennung virtuelles Moment, durch welche in der That nichts anderes als eine Arbeit bezeichnet wird. Den Ausdruck Moment einer Kraft habe ich, dem gewöhnlichsten Brauche folgend, zur Bezeichnung des Products aufbehalten, welches sich ergibt wenn man den Abstand der Kraft von einer Axe mit der Projection der Kraft auf eine zu dieser Axe senkrechte Ebene multiplicirt; und ich habe bemerklich gemacht, wie man in natürlicher Weise auf die Betrachtung dieser Größe durch Betrachtung der Arbeit geleitet wird, welche eine Kraft während einer Rotationsbewegung ihres Angriffspuncts um eine feste Axe erzeugt (S. 62).

Ein allgemeiner und fruchtbarer Satz (S. 79) zeigt, welche Rolle das Product aus einer Kraft und ihrer Wirkungsdauer spielt. Ich hielt es für räthlich, dieser Größe einen besondern Namen zu geben, um den Schüler auf ihre Wichtigkeit aufmerksam zu machen. Sie — wie es zuweilen geschieht — durch den Ausdruck Bewegungsgröße zu bezeichnen, welcher eigentlich das Product aus der Masse eines Körpers und seiner Geschwindigkeit bedeutet, schien mir die Gefahr nach sich zu ziehen, daß eine Wirkung mit ihrer Ursache verwechselt werde; ich habe das Wort Antrieb (impulsion) vorgezogen, dessen Sinn für die Mechanik ich blos näher zu bestimmen hatte.

Eine andere Neuerung, von welcher ich mir Vortheil für den Anfänger im Studium der Mechanik verspreche, ist die Beseitigung des Ausdrucks lebendige Kraft. Das darunter Verstandene ist keine Kraft, sondern entweder ein Arbeitseffect, oder die Fähigkeit eine Arbeit zu erzeugen. Ich habe (S. 181) die Gründe für meinen Vorschlag angegeben, den Namen lebendige Potenz für die Hälfte derjenigen Größe einzuführen welche man sonst lebendige Kraft nennt.

Noch einige Worte habe ich beizufügen über den Gegenstand eines jeden der vier Abschnitte, aus denen dieß Buch besteht.

Der erste Abschnitt ist, so zu sagen, eine Aufzählung, ein erklärendes Verzeichniß der verschiedenen Größen, welche der Mechanik besonders angehören, — eine Darlegung der arithmetischen und geometrischen Eigenschaften welche sich aus der blosen Definition dieser Größen unmittelbar ergeben. Die Erfahrung beim Unterrichte hat mich gelehrt, daß es gut sei, diese Einzelheiten, die sich lediglich auf die Grundbegriffe von Zeit, Kraft und Raum

stützen, abgesondert von den Sätzen der Dynamik zu behandeln, durch welche die Relationen zwischen den Kräften und der Bewegung in's Licht gestellt werden. Das Studium dieses ersten Abschnitts mag vielleicht einigermaßen trocken erscheinen; oder man dürfte, wenn auch nicht das Verständniß, doch das Behalten der dort vorkommenden Sätze und Formeln etwas schwierig finden. Ich rathe dem Anfänger, sich durch allenfallsige Zweifel, welche ein erstmaliges Lesen bei ihm zurücklassen könnte, nicht beirren zu lassen, und nicht zu glauben, daß er die sämmtlichen Sätze des ersten Abschnittes völlig inne haben müßte ehe er weiter gehen dürfe. Findet derselbe aber beim Studium des zweiten und dann des dritten Abschnitts eine Berufung auf früher festgestellte Definitionen oder Lehrsätze, so ist durchaus nöthig, daß er jedesmal zu den darüber gegebenen Erläuterungen zurückkehre und sie zu seinem Eigenthum mache, indem er sich bemüht, ganz in den Sinn der gebrauchten Ausdrücke einzudringen und von den aus jenen Sätzen fließenden mathematischen Folgerungen eine sichere Ueberzeugung zu gewinnen.

Der zweite Abschnitt handelt von der Dynamik des materiellen Puncts in den verschiedenen Fällen einer absoluten geradlinigen oder krummlinigen Bewegung und einer relativen Bewegung. In Betreff der letztern ist es mir, wie ich glaube, gelungen, durch Anwendung der geometrischen Methode die Einsicht in jene Theorie zu erleichtern, welche Coriolis, nachdem er sie im Journal der polytechnischen Schule veröffentlicht hatte,*) in seiner Mechanik starrer Körper**) wiedergab, und welche in meinen Augen einen seiner wohlberechtigten Ansprüche auf das Andenken der gelehrten Welt ausmacht.

Der dritte Abschnitt gibt eine Darlegung der allgemeinen Lehrsätze über Bewegung und Gleichgewicht beliebiger Körper. Er zerfällt in zwei Kapitel, von denen sich das eine mit der Dynamik, das andere mit der Statik beschäftigt. Von diesen beiden Theilen unserer Wissenschaft kommt hier nur Allgemeines zur Sprache, während es der Fortsetzung des Werkes vorbehalten bleibt, die Statik der Seil-Systeme, die Statik articulirter Systeme von starren Körpern, die veränderliche Bewegung starrer Körper um feste Axen, sowie die Elemente der Maschinen mit Rücksicht auf die Reibung abzuhandeln.

---

*) Journal de l'école polyt., cah. XXI et XXIV.

**) Mécanique des corps solides, p. 40 et suiv.

Der vierte Abschnitt endlich hat zum Gegenstande die wesentlichsten Kenntnisse aus der Hydrostatik. Ich habe hier dargethan, wie die Eigenschaft der nach allen Seiten gleichen Pressung eine Folge aus der den vollkommenen Flüssigkeitszustand charakterisirenden Abwesenheit der Reibung ist.

In der Absicht, die Formeln der Mechanik unter einfacher und sprechender Gestalt zu erhalten, habe ich mehrere feste Bezeichnungen angenommen, von denen einige bereits üblich, andere aber neu sind.

Drücken die Buchstaben F, F', ... Kräfte aus, so bedeuten die Zeichen F_x, F'_x, ... die Projectionen dieser Kräfte auf eine Axe der x. Ebenso wird durch v_x, v'_y die Projection der Geschwindigkeit v auf die Axe der x und die Projection der Geschwindigkeit v' auf die Axe der y ausgedrückt. Zuweilen tritt ein solcher Index am untern Theil des Buchstabens neben einen schon vorhandenen Index; so bedeutet z. B. v_0 eine Anfangsgeschwindigkeit, und v_{0x} die Projection derselben auf eine Axe der x.

Der Buchstabe 𝕿 vertritt stets das Wort Arbeit (travail). Bezeichnet F eine Kraft, so ist das Zeichen 𝕿F zu lesen „Arbeit der Kraft F."

Der Buchstabe 𝕸 ersetzt immer das Wort Moment. Die Bezeichnung $\mathfrak{M}_{Ox}F$ wird ausgesprochen: „Moment der Kraft F gegen die Axe Ox."

Der Buchstabe Σ steht statt des Wortes Summe. Z. B. ΣF_x bedeutet die Summe aus den Projectionen der Kräfte F auf eine Axe der x, wobei diese Kräfte in beliebiger Anzahl vorhanden und einzeln durch F', F'', F''' ꝛc. angedeutet sind. Jene Bezeichnung Σ unterscheidet sich von dem Zeichen $\int$ darin, daß letzteres eine Summe unendlich kleiner Elemente ausdrückt, welche unter Differentialform auftreten.

Der Buchstabe g ist ausschließlich zur Bezeichnung der constanten Beschleunigung durch die Schwere verwendet. Gilt der Meter und die Secunde als Längen- und Zeiteinheit, so ist für die Breite von Paris $g = 9{,}8088$. Man wird auf S. 78 finden, warum ich vermied, jene Größe die „Intensität der Schwere" zu nennen.

Der Buchstabe π bedeutet überall das Verhältniß des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser.

Jede Figur der am Ende des Bandes beigegebenen Tafeln ist neben der Folgenummer noch mit einer kleineren Zahl versehen, welche auf die betreffende Nummer des Textes zurückweis't.

Inhalt.

Seite

Einleitung.

Von den verschiedenen Zweigen der Mechanik. — Zweck dieses Buches.

Die Mechanik,*) im weitesten Sinne des Worts, ist die Wissenschaft, welche im Allgemeinen die Gesetze und Ursachen der Bewegung der Körper zum Gegenstande hat, und in besonderem Falle die Bedingungen betrachtet, unter denen die Körper im Gleichgewichte bleiben, d. h. in Ruhe beim Vorhandensein mehrerer sich widerstreitenden Ursachen zur Bewegung.

Die allgemeinen Wahrheiten dieser Wissenschaft machen zusammengenommen die rationelle Mechanik aus; so genannt, weil die von ihr gelehrten Sätze mittels strenger Schlußfolgerungen aus einer geringen Anzahl von Grundbegriffen und Principien oder einfachen Naturgesetzen hergeleitet werden; in der Art, daß — wenn einmal diese Principien als Grundsätze angenommen sind — die Aussprüche der rationellen Mechanik die Geltung mathematischer Wahrheiten haben, welche überall und unter allen Umständen bestehen, ohne irgend eine Ausnahme; sie sind also — mit einem Worte — Lehrsätze. Gleichwie aber die Geometrie von Figuren ausgeht welche sich, streng genommen, an den körperlichen Gebilden der Natur niemals finden, ebenso nimmt auch die rationelle Mechanik in mehreren ihrer Lehrsätze Körper von solchen Eigenschaften an, wie sie die wirklichen Körper nie völlig besitzen; man muß sich deßhalb immer bewußt bleiben, daß in diesem Falle die durch die Wissenschaft gewonnenen Sätze auf theoretischen Hypothesen beruhen und sich in der wirklichen Körperwelt nur annäherungsweise bestätigen.

In der Ordnungsfolge der wissenschaftlichen Studien reiht sich die rationelle Mechanik unmittelbar an die reine Mathematik. Zu der geometrischen Anschauung der aufeinanderfolgenden Lagen eines beweglichen Punctes und der von ihm durchlaufenen linearen Räume fügt sie die Vorstellung vom Zeitmaße,

*) Der Name kommt vom griechischen μηχανή, Maschine. Die Lehre von den Maschinen bildet heutzutage nur einen Theil der Mechanik.

und aus dieser Verbindung ergibt sich der Begriff der Geschwindigkeit. An das Volum eines Körpers knüpft die Mechanik noch den Begriff der Masse, vermöge welcher zwei verschiedene Körper verschiedene Intensitäten der bewegenden Ursachen erfordern um eine und dieselbe Bewegung anzunehmen.

Gewöhnlich wird die rationelle Mechanik in zwei Theile eingetheilt, von denen der eine — die Statik — ausschließlich von den Bedingungen des Gleichgewichts der Körper handelt, während der andere — die Dynamik*) — sich mit den Beziehungen der Bewegung zu ihren Ursachen beschäftigt, welch letztere Kräfte heißen. Bei dem Gange des vorliegenden Buches werden sich die Lehrsätze der Statik als Folgerungen aus den wesentlichen Sätzen der Dynamik herausstellen.

Die rationelle Mechanik ist die nothwendige Grundlage verschiedener Wissenschaften, welche man als Zweige der Mechanik nach ihrer allgemeinsten Bedeutung betrachten kann; diese sind: die mathematische Astronomie oder Mechanik des Himmels; gewisse Abschnitte der mathematischen Physik; die Theorie der Stabilität von Constructionen; die dynamische Theorie der Maschinen; die Hydraulik. Von diesen fünf Zweigen stützen sich die beiden ersten auf die höchsten Gebiete des mathematischen Wissens, und scheinen, sowohl wegen ihres Gegenstandes als wegen ihrer Schwierigkeit, auf eine kleine Zahl gelehrter Bearbeiter angewiesen zu bleiben. Dagegen sind die drei übrigen, um ihres praktischen Nutzens willen, unter dem Gesammtnamen der angewandten Mechanik wesentliche Bestandtheile der Ingenieurwissenschaft geworden; sie beruhen einerseits auf experimentalen Thatsachen, andrerseits auf den leichtesten Sätzen der rationellen Mechanik, und verlangen — neben dem nöthigen Geschick zu mathematischem Schließen — nur verhältnißmäßig wenige Vorstudien, namentlich wenn man sich auf allgemein Wichtiges beschränkt.

Die angewandte Mechanik, als Inbegriff der eben angegebenen drei Abtheilungen, unterscheidet sich in mehreren sehr erheblichen Punkten von der usuellen oder industriellen Mechanik, welche die Eigenschaften der Maschinen und das Verfahren bei deren Construction kennen lehrt. Diesen Unterschied wollen wir kurz beleuchten.

Eine Maschine besteht im Allgemeinen aus mehreren, theils festen, theils beweglichen Stücken, welche so unter sich verbunden sind, daß, wenn man dem einen dieser Bestandtheile eine gewisse Bewegung ertheilt, dadurch bestimmte Bewegungen an den übrigen beweglichen Stücken der ganzen Vorrichtung erzeugt werden. Wirkungen solcher Art führen den Namen Ueber-

*) Vom griechischen δύναμις, Kraft, Vermögen. Die Untersuchungen, welche sich mit Bewegung beschäftigen ohne die Kräfte mit in Betracht zu ziehen, gehören zur geometrischen Mechanik und nicht zur Dynamik.

tragung oder Transmission der Bewegung, und die Kenntniß der hiefür anzuwendenden Mittel leitet auf die Kunst, mit Hülfe eines vernunftlosen Motors Operationen auszuführen, für welche oft die Geschicklichkeit der geübtesten Hand nicht ausreichen würde. Der Theil der industriellen Mechanik, welcher an den Maschinen vornehmlich die zwischen den verschiedenen Bewegungen ihrer Bestandtheile stattfindenden Relationen betrachtet, ohne die äußern Ursachen dieser Bewegungen (d. i. die Intensität des Motors und der Widerstände) in Rechnung zu ziehen, könnte die geometrische Mechanik genannt werden, weil die hier vorkommenden Methoden auf den Regeln der Geometrie beruhen. Diese Methoden sind sehr verschieden und oft höchst sinnreich; das specielle Studium ihrer zahlreichen Combinationen gehört jedoch nicht eigentlich zur angewandten Mechanik, welche blos die einfachsten Begriffe über die Transmission der Bewegung nöthig hat, um Beispiele für die dynamische Theorie der Maschinen liefern zu können. Mit diesem Namen belegen wir nämlich die Wissenschaft, welche die von den Maschinen (entweder in ihrer Bewegung oder in ihrem Gleichgewichtszustande) aufgenommenen oder ausgeübten Kräfte der Berechnung unterwirft; sie dient als Führer beim Gebrauche der Motoren, welche die Natur der Industrie zur Verfügung stellt; und ohne sie würde die geometrische Mechanik (deren großer Nutzen übrigens nicht zu bestreiten ist) häufig unfruchtbar bleiben.

Ein anderer Theil der industriellen Mechanik bezieht sich auf die Construction der Maschinen; er behandelt die Eigenschaften der Materialien, die Kunst sie gehörig zu verbinden, und die Regeln nach denen man für jedes Stück der Maschine die seiner Aufgabe entsprechenden Formen und Dimensionen bestimmt. Die Theorie der Stabilität der Constructionen leistet dieser Abtheilung sehr wesentlichen Vorschub, macht aber nicht die ganze Abtheilung selbst aus.

Endlich umfaßt die industrielle Mechanik noch die mechanische Technologie, d. h. die Lehre von denjenigen Instrumenten, welche man Werkzeug-Maschinen (machines-outils) nennt, und welche — geleitet von den jedem einzelnen Falle angemessenen Vorrichtungen zur Transmission der Bewegung — die verschiedenen Operationen der Industrie unmittelbar ausführen, die vervollkommnete Fabrikation von Maschinen selbst mit inbegriffen. Dahin gehören: Preßmaschinen, Bohrmaschinen, Walzmaschinen, Gravirmaschinen, Pulverisirmaschinen, Spinnmaschinen, Webmaschinen rc. Die Gegenstände, mit welchen sich dieser Theil der industriellen Mechanik befaßt, machen den Hauptzweck aus nach dem die übrigen hinstreben; allein die Wissenschaft besitzt in Betreff derselben nur wenige allgemeine Vorschriften, und die Belehrung darüber hat sich zum größern Theil an Beschreibungen, Zeichnungen und Versuche zu halten.

Diese flüchtige Aufzählung mag hinreichen, um einigermaßen die Menge

von theoretischen Betrachtungen, Thatsachen und Verfahrungsweisen zu überblicken, welche sich unter den allgemeinen Namen der Mechanik einreihen lassen.

Das gegenwärtige Werk betrachtet als seinen besondern Gegenstand die Mechanik für den Ingenieur. Dasselbe wird die wichtigsten von den strengwahren und allgemeinen Lehrsätzen der rationellen Mechanik vorführen und beweisen, dann die annähernden Methoden der angewandten Mechanik auseinandersetzen, welche — mit Hülfe der durch die Erfahrung gelieferten Angaben — dazu dienen sollen, die auf feste Constructionen und auf Maschinen bezüglichen Aufgaben, sowie hydraulische Fragen, durch Rechnung und unter practischem Gesichtspuncte zu lösen.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Begriffe. — Definitionen der Größen welche der Mechanik eigenthümlich sind. — Numerische und geometrische Eigenschaften dieser Größen.

Erstes Kapitel.

Die Bewegung, unabhängig von ihren Ursachen betrachtet.

§. 1. Gleichförmige Bewegung eines Punctes.

1. Die Bewegung eines Punctes längs einer geraden oder krummen Linie ist gleichförmig, wenn derselbe gleiche Wegstrecken (immer im nämlichen Sinne) in gleichen Zeitabschnitten durchläuft, wie klein man sich auch diese Zeiten denken mag; woraus folgt, daß bei einer und derselben gleichförmigen Bewegung beliebige Stücke des durchlaufenen Raumes sich verhalten wie die auf ihre Zurücklegung verwandten Zeiten.

2. Der Begriff der Zeit entspringt aus einer durch Erfahrung erlangten Vorstellung, und bedarf hier keiner besondern Definition.

Ein beliebiger Zeitabschnitt hat einen Anfang und ein Ende; jenen nennen wir den ersten oder Anfangs-Augenblick, dieses den letzten oder End-Augenblick. Somit ist bezüglich der Zeit ein Augenblick dasselbe, was in einer Linie ein geometrischer Punct ist, und in der bestimmten Sprache der Mechanik hat ein Augenblick ebensowenig irgend eine Dauer, als der Punct eine Länge hat.

3. Bedeutet

e' ein gewisses Stück des linearen Raumes den der fragliche Punct durchläuft,

t' die Zeit welche verfließt während dieses Stück zurückgelegt wird,

e irgend ein anderes Stück des von jenem Puncte durchlaufenen Raumes,
t die für die Zurücklegung dieses Stückes e aufgewendete Zeit,

so ist, nach der Definition in Nr. 1., die Bewegung des betrachteten Punctes gleichförmig, wenn

$$\frac{e}{e'} = \frac{t}{t'} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e}{t} = \frac{e'}{t'}.$$

Die erste dieser Gleichungen drückt die Gleichheit zweier reiner Zahlen aus, welche unabhängig sind von der Wahl der Einheiten für Raum und Zeit; sie zeigt blos an, daß, wenn die Zeit t das Doppelte, Dreifache, Vierfache...., die Hälfte, das Drittel, das Viertel...., zwei Drittel, drei Viertel.... der Zeit t' ist, dann auch der lineäre Raum e das Doppelte, Dreifache 2c. des Raumes e' beträgt. Die zweite der obigen Gleichungen spricht die Gleichheit zweier Größen aus, deren numerischer Ausdruck je nach der Wahl der Einheiten sich ändert. Sie setzt jedenfalls voraus, daß die Zeiten t und t' auf eine und dieselbe (übrigens beliebige) Einheit bezogen sind, denn ohne diese vorläufige Operation würde man die Bedeutung der Quotienten $\frac{e}{t}$, $\frac{e'}{t'}$ nicht verstehen können. Doch ist die zweite Gleichung homogen, wie die erste; d. h. wenn sie richtig ist für gewisse Einheiten des Raums und der Zeit, so bleibt sie auch richtig wenn man diese Einheiten ändert.

Bezeichnet man den Quotienten $\frac{e'}{t'}$ durch a, so ist die Eigenschaft der gleichförmigen Bewegung ausgesprochen durch die Gleichung

$$\frac{e}{t} = a, \qquad \text{oder} \qquad e = at,$$

in welcher a eine Constante ist, während e und t veränderlich sind.

Die Größe a, welche für eine gegebene gleichförmige Bewegung von der gewählten Zeiteinheit abhängt, zeigt, nach der letzten Formel, den Raum an, der in der Zeiteinheit zurückgelegt wurde, oder doch in derselben zurückgelegt werden würde bei hinreichend fortgesetzter und stets gleichförmig bleibender Bewegung.

Diese Größe a oder $\frac{e}{t}$ heißt die Intensität oder der absolute Werth der Geschwindigkeit welche der betrachtete Punct besitzt.

Also wird bei gleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit, ihrem absoluten Werthe nach, durch den in der Zeiteinheit durchlaufenen Raum gemessen, oder allgemeiner durch den Quotienten aus einem der durchlaufenen Räume dividirt mit dem numerischen Ausdruck der Zeit innerhalb welcher dieser Raum zurückgelegt wurde.

4. Der numerische Ausdruck der Geschwindigkeit verlangt die bestimmte Wahl einer Zeiteinheit und einer Längeneinheit. Die in den Formeln der Mechanik allgemein angenommene Zeiteinheit ist die Secunde, d. h. der 86400ste Theil des mittleren Sonnentags. Die Einheit der Länge oder des Raumes, deren wir uns für unsere Beispiele bedienen werden, soll der Meter sein. Man drückt diese doppelte Uebereinkunft dadurch aus, daß man sagt, die Geschwindigkeit sei berechnet in Metern auf die Secunde. Gleichwohl gebraucht man hin und wieder auch Ausdrücke, wie die folgenden: Geschwindigkeit von 100 Fuß auf die Minute, von 20 Meilen auf die (Zeit-) Stunde. Wird aber eine gleichförmige Geschwindigkeit in solcher Art angegeben, so ist es leicht, daraus die Geschwindigkeit in Metern auf die Secunde zu erschließen. Beträgt z. B. die Geschwindigkeit das einemal eine Wegstunde von 4000 Metern (lieue de 4^{km}) auf die (Zeit-) Stunde, ein andermal 100 englische Fuß auf die Minute, so erhält man in Metern auf die Secunde beim ersten Fall $\frac{4000}{3600} = 1 + \frac{1}{9}$, beim zweiten Fall $\frac{100 \,.\, 0{,}3048}{60} = 0{,}508$.*)

5. Man sieht bald, daß zur Bestimmung der gleichförmigen Bewegung eines Punctes auf einer gegebenen Linie die Intensität seiner Geschwindigkeit nicht ausreicht, sondern noch der Sinn derselben anzugeben ist. Hat man aber einmal den Gebrauch der algebraischen Vorzeichen zur Bestimmung der Lage eines Punctes auf einer gegebenen Linie sich klar gemacht**), so wird man leicht die Benützung dieser Zeichen auf die Bestimmung des Sinnes einer Geschwindigkeit ausdehnen können. Ein Beispiel möge dieß zeigen.

Aufgabe. Man kennt 1) die Lage M_0 welche ein auf einer gegebenen Linie Os (Fig. 1.) beweglicher Punct in einem gewissen Augenblick inne hat; 2) die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Punct zu einer gleichförmigen Bewegung angeregt wird; 3) den Sinn dieser Bewegung (ob von M_0 gegen s oder umgekehrt). Es sei nun die Lage M zu bestimmen, welche der bewegte Punct einnehmen wird nach Verfluß einer gewissen Zeit, von dem Augenblicke an gerechnet wo er sich in M_0 befand.

*) Bei der See-Schifffahrt gilt als Einheit der Geschwindigkeit der Knoten. Die Zahl der Knoten, welche ein Schiff auf dem Meere macht, ist gleich der Anzahl (franz.) geographischer Meilen, die während einer Stunde zurückgelegt werden. Die geographische Meile ist der dritte Theil einer Seemeile (lieue marine) oder der sechzigste Theil eines Grades; ihre Länge beträgt also ungefähr 1852 Meter. Mithin entspricht ein Knoten einer Geschwindigkeit von 1852^m auf die Stunde oder von $0^m{,}514$ auf die Secunde.

**) Grundlehren, Nr. 3.

Um die Betrachtung ganz allgemein zu halten, sei

t die seit dem Augenblick, wo der bewegliche Punkt in M_0 war, abgelaufene Zeit; jener Augenblick heißt der erste oder anfängliche, weil von ihm aus die in die Rechnung eingeführte Zeit t gezählt wird;

s_0 die Distanz des Punctes M_0 von einem als bekannt vorausgesetzten Puncte O auf der Linie Os, welcher der Ursprung der Distanzen heißt; diese Distanz s_0 ist algebraisch aufzufassen, d. h. sie ist eine mit einem Vorzeichen begabte Länge, und zwar mit + oder mit —, je nachdem sie von O aus in dem als positiv angenommenen Sinne oder im entgegengesetzten aufgetragen ist; der Punct M_0, von welchem die Größe s_0 abhängt, heißt die erste oder Anfangs-Lage des beweglichen Punctes, was jedoch nicht so zu verstehen ist als ob sich der Punct erst von dort aus in Bewegung setze, sondern vielmehr nur andeutet daß der bewegte Punct mit jener Lage in dem Augenblicke zusammentrifft, welcher als Anfang der Zeit t gilt;

V die Geschwindigkeit des Beweglichen; eine constante Größe, aber positiv oder negativ, je nachdem das Bewegliche im positiven Sinne läuft oder im entgegengesetzten;

s die Distanz des Beweglichen vom Ursprung O nach Ablauf der Zeit t; das Zeichen, welche diese Distanz annimmt, gibt an, in welchem Sinne sie aufzutragen ist.

Man hat nun, wie leicht zu sehen,

$$s = s_0 + Vt. \qquad [1]$$

Diese Gleichung, deren Richtigkeit sich für alle Fälle erprobt welche hinsichtlich der Werthe und Vorzeichen der darin vorkommenden Größen möglich sind, heißt die Gleichung der Bewegung für das oben betrachtete Bewegliche. Sie ist also die allgemeine Gleichung für die gleichförmige Bewegung eines Punctes, d. h. sie paßt auf jeden beliebigen Fall, sobald man nur den Constanten s_0 und V die dem einzelnen Falle entsprechenden Werthe beilegt.

6. **Aufgabe.** Es sind die Lagen des Beweglichen für zwei gegebene Augenblicke bekannt, und überdieß weiß man, daß seine Bewegung auf einer gegebenen Linie gleichförmig vor sich geht; man soll die Gleichung dieser Bewegung finden.

Die gesuchte Gleichung hat jedenfalls die Form $s = s_0 + Vt$ [1]; aber die constanten Größen s_0 und V sind nicht unmittelbar gegeben, sondern erst zu berechnen. Zu diesem Zwecke kann der Ursprung der Distanzen und der Anfang der Zeit nach Willkür gewählt werden.

Sind

s_1 und s_2 die Distanzen der beiden bekannten Lagen vom Ursprung O,

t_1 und t_2 die Zeiten, welche seit dem ersten Augenblicke verflossen sind bis jene beiden Lagen erreicht wurden,

so muß die obige allgemeine Gleichung [1] befriedigt werden, wenn man in ihr für s und t gleichzeitig die Werthe s_1 und t_1, und dann s_2 und t_2 substituirt; man hat daher zwei Gleichungen für die Berechnung der Unbekannten s_0 und V, nämlich

$$s_1 = s_0 + Vt_1 \quad \text{und} \quad s_2 = s_0 + Vt_2,$$

woraus folgt

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \text{und} \quad s_0 = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1}.$$

Die Gleichung der Bewegung, d. h. diejenige welche die Lage des Beweglichen für jeden beliebigen Augenblick liefert, ergibt sich nun, wenn man obige Ausdrücke für V und s_0 in der allgemeinen Gleichung [1] substituirt. Man hat sonach

$$s = \frac{s_1 t_2 - s_2 t_1}{t_2 - t_1} + \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\, t.$$

Die nämliche Bewegung würde auch durch die Gleichung

$$s - s_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}\,(t - t_1)$$

ausgedrückt sein, zu deren Herstellung man zuerst s_0 aus den Gleichungen $s = s_0 + Vt$, $s_1 = s_0 + Vt_1$ durch Subtraction eliminirt, und dann anschreibt daß die so erhaltene Gleichung

$$s - s_1 = V\,(t - t_1)$$

durch die gleichzeitigen Werthe s_2 und t_2 befriedigt werden muß, woraus sich der Werth

$$V = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

ergibt, den man nun in der vorhergehenden Gleichung substituirt. In der auf diesem Wege erlangten Formel liegt jedoch der Werth der Distanz s_0 vom Ursprung nicht mehr unmittelbar vor Augen.*)

§. 2. Von der veränderlichen Bewegung eines Punctes.

7. Wenn die Bewegung eines Punctes nicht gleichförmig ist, heißt sie veränderlich. Sie ist periodisch-gleichförmig, wenn gewisse aufeinander folgende gleichgroße Räume in gleichen Zeiten durchlaufen werden,

*) Bemerkenswerth ist die Analogie zwischen der Auflösung dieser Aufgabe und derjenigen, bei welcher man die Gleichung einer durch zwei gegebene Puncte gehenden Geraden verlangt. (GL. Nr. 92.)

ohne daß diese Bedingung auch für die Unterabtheilungen jedes einzelnen Raumes erfüllt wird. (Beispiele: der Zeiger einer Secundenuhr; der Gang eines Thieres; die Bewegung eines Punctes auf dem Umfange eines Wasserrades, dessen Schaufeln vom Wasser stoßweise getrieben werden.)

8. Die veränderliche Bewegung eines Punctes auf der von ihm durchlaufenen geraden oder krummen Linie ist bestimmt, sobald man für jeden Augenblick die Relation hat, welche stattfindet zwischen der Entfernung s des beweglichen von einem festen Puncte dieser Linie, und der seit einem angenommenen Anfangs-Augenblick verflossenen Zeit t. Diese Relation kann in gewissen Fällen analytisch ausgedrückt werden, durch eine Gleichung, welche die Bewegungsgleichung des betrachteten Punctes heißt.

Wird von einer solchen Gleichung ganz im Allgemeinen gehandelt, so wählt man gewöhnlich die Bezeichnung

$$s = F(t), \qquad [2]$$

wobei der Buchstabe F irgend eine Function andeutet.

9. Es ist von Wichtigkeit, in's Klare zu bringen, was man unter der Geschwindigkeit eines in veränderlicher Bewegung begriffenen Punctes für einen bestimmten Augenblick zu verstehen habe.

Dieser Punct habe in einem gewissen Augenblicke die Lage M; von hier aus durchlaufe er den Raum MN in einer gewissen Zeit τ, welche man so klein annehmen kann, daß während derselben der Punct sich immer im nämlichen Sinne bewegt, also von der Lage M sich fortwährend entfernt. Der Quotient $\frac{MN}{\tau}$, der sich ergibt wenn man die Länge MN durch den numerischen Ausdruck der Zeit τ dividirt, soll die mittlere Geschwindigkeit heißen mit welcher der Raum MN beschrieben worden ist.

Nimmt man nun für τ nach und nach immer kleinere und kleinere Werthe an, wodurch auch der Raum MN (ohne seinen Anfangspunkt M zu ändern) in's Unbestimmte abnimmt, so strebt der Quotient $\frac{MN}{\tau}$ einer bestimmten Grenze zu. Dieser Grenzwerth ist die Intensität der Geschwindigkeit des beweglichen Punctes in dem Augenblicke wo er sich in M befindet; und diese Intensität, verbunden mit demjenigen Vorzeichen welches dem Sinne der Bewegung entspricht, gibt den algebraischen Ausdruck der Geschwindigkeit. Um dieß kurz auszudrücken, sagt man, die Geschwindigkeit eines Punctes in einer bestimmten Lage sei der Quotient aus dem unendlich kleinen (positiven oder negativen) Raum, den er von jener Lage aus zunächst zu beschreiben hat, dividirt durch die dafür aufgewandte unendlich kleine Zeit.

Nach dieser Definition und den Grundbegriffen der Differentialrechnung*) hat man, wenn $s = F(t)$ die Gleichung der Bewegung ist (8) und v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t bezeichnet:

$$v = \frac{ds}{dt} = F'(t) \qquad [3]$$

und diese Größe ist positiv oder negativ, je nachdem der Punct im erwähnten Augenblicke im positiven oder im entgegengesetzten Sinne läuft.

Hält man obige Definition mit derjenigen zusammen, welche (3) für die Geschwindigkeit bei gleichförmiger Bewegung gegeben wurde, so ergeben sich folgende Bemerkungen. Bei der gleichförmigen Bewegung erhält man stets den nämlichen Quotienten, welches Stück des durchlaufenen Raumes man auch immer durch den entsprechenden Zeitaufwand dividiren möge; und deshalb wird man, wenn für diesen Fall die soeben gegebene allgemeine Definition der Geschwindigkeit in Anwendung kommt, dieselbe gleich dem in jeder Secunde beschriebenen Raume finden. Bei der veränderlichen Bewegung aber ist die Geschwindigkeit nicht mehr ein in der Zeiteinheit wirklich durchlaufener Raum. Man kann sie hier als den Raum auffassen der in einer Secunde beschrieben werden würde, wenn diejenige Bewegung, welche in der unendlich kleinen Zeit nach oder vor dem betrachteten Augenblicke stattfindet, eine Secunde lang sich gleichförmig fortsetzen könnte.

10. Auf eine andere für die Mechanik wichtige Größe kommt man bei der Betrachtung aufeinanderfolgender Werthe einer veränderlichen Geschwindigkeit. Ist v die Geschwindigkeit nach der Zeit t, und $v + \Delta v$ die Geschwindigkeit nach der (vom nämlichen ersten Augenblicke aus gezählten) Zeit $t + \Delta t$, so ist die positive oder negative Größe Δv der algebraische Zuwachs den die Geschwindigkeit während der Zeit Δt erlangt hat.

Der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist die mittlere Zunahme der Geschwindigkeit, auf die Zeiteinheit berechnet, innerhalb des Zeitraums Δt.

Vermindert man Δt fortwährend, so kommt dieser Quotient beliebig nahe an einen Grenzwerth $\frac{dv}{dt}$, und dieser heißt die Beschleunigung auf die Zeiteinheit — oder einfach die Beschleunigung**) — in dem betrachteten Augenblicke, d. h. zu Ende der Zeit t.

---

*) GL., Nr. 220.

**) Man findet zuweilen den Ausdruck Beschleunigung der Geschwindigkeit; derselbe erscheint aber als ein Pleonasmus, denn das Wort Beschleunigung im gewöhnlichen Sinne bedeutet schon Steigerung der Geschwindigkeit. In

Diese Größe $\frac{dv}{dt}$ kann, wie $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, sowohl positiv als negativ werden; positiv ist sie, wenn für einen beliebig kleinen Zuwachs der Zeit die an sich positive oder negative Geschwindigkeit algebraisch größer wird, d. h. sich dem positiv Unendlichen zu- und vom negativ Unendlichen abwendet; negativ dagegen wird sie, wenn die Geschwindigkeit algebraisch kleiner wird. Man sieht leicht, daß, wenn Geschwindigkeit und Beschleunigung einerlei Vorzeichen haben, die Bewegung sich *beschleunigt* im gewöhnlichen Sinne des Worts; und daß sie im entgegengesetzten Falle *verzögert* wird.

Diese allgemeinen Betrachtungen mögen nun durch einige Beispiele erläutert werden.

11. Erstes Beispiel. *Gleichförmig veränderte Bewegung.*

Die Bewegung eines homogenen sphärischen Körpers, welcher unter der Einwirkung der Schwere über eine geneigte Ebene herabrollt, gehört zur einfachsten Art veränderlicher Bewegung. Zählt man den durchlaufenen Raum und die dafür aufgewendete Zeit immer von der Lage und von dem Augenblicke aus, wo die Kugel (welche bis dahin in Ruhe war) der Wirkung der Schwere allein überlassen worden ist, so verhalten sich, der Erfahrung gemäß, die vom Mittelpunct der Kugel beschriebenen (der schiefen Ebene parallelen) Wege wie die Quadrate der entsprechenden Zeiten. Diese Bewegung kann daher ausgedrückt werden durch die Formel

$$e = bt^2.$$

Mißt man den durchlaufenen Raum aus irgend einem Puncte O der Geraden, in welcher sich der Mittelpunkt der Kugel bewegt, und fängt man die Zeit in einem Augenblicke zu zählen an, der nicht mit dem Beginne der

---

dem von uns angenommenen mathematischen Sinne ist die Beschleunigung eine *Aenderung der Geschwindigkeit im Vergleich zur Zeit*, und diese Aenderung ist *positiv* oder *negativ*.

Die Größe $\frac{dv}{dt}$, welche in neuester Zeit den Namen Beschleunigung erhalten hat, wird in den Lehrbüchern der analytischen Mechanik *beschleunigende Kraft* genannt. Diese Ausdrucksweise hat für Anfänger das Mißliche, daß sie einer Wirkung einen Namen beilegt welcher eine Ursache bezeichnet; sie sollte deßhalb, wie wir glauben, beim Unterrichte vermieden werden.

Nimmt man $s = F(t)$ als Gleichung für die Bewegung eines Punctes auf einer geraden oder krummen Linie an, so hat man für die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$, und für die Beschleunignng

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt}.$$

Diese letztere Darstellung der Ableitung zweiter Ordnung von s nach t wird gewöhnlich mit der Bezeichnung $\frac{d^2s}{dt^2}$ vertauscht, welche ganz dasselbe aussagt.

Bewegung zusammenfällt, so hat der Ausdruck für die Entfernung s des beweglichen Punctes vom Ursprung O nach der Zeit t die Form

$$s = s_0 + at + bt^2. \qquad [4]$$

Bei passender Wahl der den Constanten s_0, a, b beizugebenden Vorzeichen umfaßt diese Formel auch noch den Fall, wo der Körper, ehe er sich selbst überlassen wird, durch irgend eine Veranlassung eine Bewegung längs der Richtung des größten Gefälls der Ebene erhalten hat, entweder in auf- oder in absteigendem Sinne.

Es ist hier noch nicht der Ort, auseinanderzusetzen warum die obige Gleichung gilt. Indem man sie vorläufig als Ausspruch einer durch's Experiment gewonnenen Thatsache ansieht,*) soll an diesem Beispiele nur deutlich gemacht werden was die Geschwindigkeit bei veränderlicher Bewegung sei; und zwar zuerst ohne Benützung der Differentialrechnung.

Nimmt man für t einen bestimmten Werth, so findet man durch die Formel $s = s_0 + at + bt^2$ den entsprechenden Werth von s, welcher angibt in welcher Lage sich der bewegliche Mittelpunct der Kugel zu Ende jener Zeit t befindet. Durch τ werde ein sehr kleiner Zeitraum bezeichnet welcher sich an die abgelaufene Zeit t anschließt, und durch s_1 die Distanz des beweglichen Punctes von O zu Ende dieses Zeit-Zuwachses. Zur Bestimmung von s_1 dient die Gleichung

$$s_1 = s_0 + a(t + \tau) + b(t + \tau)^2.$$

Die Differenz $s_1 - s$ ist der in der Zeit τ beschriebene Raum; ihr Zeichen gibt den Sinn der Bewegung zu erkennen; und wenn man diesen Raum durch τ dividirt, hat man die mittlere Geschwindigkeit während dieser Zeit; also

$$\frac{s_1 - s}{\tau} = \text{mittl. Geschw.} = a + 2bt + b\tau.$$

Je mehr τ abnimmt, um so näher kommt diese Größe dem Werthe $a + 2bt$, welcher somit die gesuchte Geschwindigkeit angibt. Man schreibt deshalb

$$v = a + 2bt.$$

Zu diesem Resultate wäre man nach den ersten Regeln der Differentialrechnung unmittelbar gelangt, durch Anwendung der Formel $v = \frac{ds}{dt}$ auf den Ausdruck [4] von s als Function der Zeit.

---

*) Wenn man beobachtet, daß die Distanzen s des Beweglichen von einem festen Puncte O, deren zugehörige Zeiten in arithmetischer Progression stehen, eine Reihe bilden für welche die zweiten Differenzen gleich werden, erkennt man daß s eine Function zweiten Grades von t ist. (GL. Nr. 129.)

12. Den mittlern Zuwachs der Geschwindigkeit auf die Zeiteinheit, der sich innerhalb des Zeitraums Δt ergibt (10), findet man mittels der beiden Gleichungen

$$v = a + 2bt \quad \text{und} \quad v + \Delta v = a + 2b\,(t + \Delta t),$$

aus denen folgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = 2b.$$

Diese Größe ist constant; mithin ist im gegenwärtigen Falle auch die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ constant und $= 2b$.

13. Aus Vorstehendem zieht man folgende Schlüsse:

1) In der durch die Gleichung $s = s_0 + at + bt^2$ ausgedrückten Bewegung ändert die Geschwindigkeit sich mit jedem Augenblicke.

2) Bei Beginn der Zeit t ist die Geschwindigkeit $= a$. Dieser (positive oder negative) Werth heißt die Anfangsgeschwindigkeit, und wird häufig durch v_0 bezeichnet.

3) Die Geschwindigkeit wächst in der Zeiteinheit um die (positive oder negative, aber constante) Größe 2b, welche die constante Beschleunigung genannt wird und im Folgenden durch den Buchstaben j bezeichnet sein soll.

14. Die Eigenschaft der constanten Beschleunigung hat der hier behandelten Bewegung den Namen der gleichförmig beschleunigten Bewegung verschafft. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung ist also charakterisirt durch die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} jt^2 \\ v &= v_0 + jt \\ \frac{dv}{dt} &= j, \end{aligned}\right\} \quad [5]$$

in denen jeder Buchstabe seine wohlzumerkende Bedeutung hat. (s_0, v_0 und j sind positive oder negative Constanten.)

15) Anmerkungen.

1) Von den drei obigen Gleichungen sind die beiden letzten aus der ersten hergeleitet worden. Umgekehrt lassen sich aber auch aus der letzten die beiden andern erhalten, bis auf die Constanten v_0 und s_0, welche willkürlich

bleiben. Integrirt man nämlich die Gleichung $dv = jdt$ und läßt das Integral mit $t = 0$ anfangen, so kommt

$$v - v_0 = jt;$$

wird dann für v sein Werth $\frac{ds}{dt}$ gesetzt und die hiedurch entstehende Gleichung

$$ds = v_0dt + jtdt$$

integrirt, so ergibt sich

$$s - s_0 = v_0t + \frac{1}{2}jt^2.$$

2) Die Gleichung $v = v_0 + jt$ liefert bei einem gewissen Werthe von t den Werth Null für die Geschwindigkeit v. Dabei ist wohl zu merken, daß eine null gewordene Geschwindigkeit nicht immer Ruhe bedeutet. Ein Punct ist in Ruhe, wenn er während eines gewissen endlichen Zeitraums beharrlich dieselbe Lage einhält. Ein in Bewegung begriffener Punct hat in einem bestimmten Augenblicke die Geschwindigkeit Null, wenn die mittlere Geschwindigkeit $\frac{MN}{\tau}$ während der Zeit τ, welche auf diesen Augenblick folgt, bei stetiger Verringerung von τ selbst ohne Ende abnimmt.*)

16. Zweites Beispiel. Eine ungleichförmig veränderte Bewegung.

Es seien AB, CD, EF, GH (Fig. 2.) aufeinanderfolgende Lagen einer beweglichen verticalen Geraden, deren oberer Endpunct mit gleichförmiger Bewegung den Kreis ACEG durchläuft, so daß also der Schnittpunct dieser Geraden mit einer Horizontallinie Ox abwechselnd von O nach N und von N nach O rückt. Man verlangt die Gleichungen für die Bewegung dieses Schnittpuncts.**)

---

*) Zur Uebung.

Es sind nachstehende Sätze zu beweisen:

1) Bei der gleichförmig veränderten Bewegung ist die einem gewissen Zeitraume entsprechende mittlere Geschwindigkeit (wie sie in Nro. 9. definirt wurde) das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten im ersten und im letzten Augenblick jenes Zeitraums.

2) Bei der nämlichen Bewegung ist die Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke gleich der mittlern Geschwindigkeit des Beweglichen für einen Zeitraum, dessen Mitte der betrachtete Augenblick ist.

3) Diese Eigenschaften finden sich nicht mehr bei einer andern Bewegung, z. B. derjenigen welche durch die Gleichung $s = at^3$ charakterisirt wäre.

**) Von solcher Art ungefähr wäre die Bewegung des Kolbens an einer Dampfmaschine wenn die Lenkstange, die ihn mit einer gleichförmig rotirenden Kurbel verbindet, im Vergleich zum Kurbelarme eine so große Länge hätte daß sie mit der Axe des Dampfcylinders nur sehr kleine Winkel bilden könnte. Denkt man sich nämlich diese Axe in der Verlängerung von AG, und die Lenkstange beinahe parallel mit AG, so würde der Kolben sich fast ebenso bewegen wie der Punkt L oder der Punct M. (Vgl. Nr. 189.)

Es sei

V die constante Geschwindigkeit auf dem Kreise;

r der Halbmesser O′A des Kreises;

CD eine beliebige Lage der beweglichen Verticalen, welche die Horizontale Ox in M schneidet;

t die Zeit innerhalb welcher die Verticale von AB nach CD kommt;

x die Distanz OM;

v die Geschwindigkeit des beweglichen Schnittpunctes M auf Ox.

Man hat zunächst OM = AO′ — LO′, oder $x = r - r \cos AO'C$;

arc. $AC = Vt$ (3); W. $AO'C = \frac{Vt}{r}$ (GL. 28.); also $x = r\left(1 - \cos\frac{Vt}{r}\right)$.

Durch Differentiation dieser Function ergibt sich die Geschwindigkeit v oder $\frac{dx}{dt}$; man findet (GL. 235.)

$$v = V \sin\frac{Vt}{r}, \quad \text{oder} \quad v = V \sin AO'C.$$

Die Geschwindigkeit v ist demnach null wenn die bewegliche Verticale sich in AO oder in GH befindet. Ihr Maximum ist V, und tritt ein wenn die Verticale durch O′ geht. Sie wird negativ wenn der obere Endpunct der beweglichen Geraden unter den Durchmesser AG herabkommt.

Als Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ findet man aus obigem Ausdruck für v

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V^2}{r}\cos\frac{Vt}{r}, \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{V^2}{r}\cos AO'C.$$

Diese Größe ändert sich also, ihrem absoluten Werthe nach, innerhalb der Grenzen $\frac{V^2}{r}$ und null.

Hält man die beiden Formeln für die Geschwindigkeit v und für die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ zusammen, und legt dem Winkel AO′C nach und nach verschiedene Werthe bei, so kann man sich von allen bei der Bewegung des Punctes M eintretenden Umständen Rechenschaft geben. Die folgende Tafel gewährt einen Ueberblick über diese Discussion.

Winkel AO'C	Geschwindigkeit v auf Ox	Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ auf Ox	Bedeutung der Formeln.
0°	0,00	$\frac{V^2}{r}$	Die Geschwindigkeit ist null und im Begriff zu wachsen. Die Beschleunigung hat ihr Maximum.
30	0,500 V	$0,866\,\frac{V^2}{r}$	Die Geschwindigkeit ist positiv und wächst, aber weniger rasch.
60	0,866 V	$0,500\,\frac{V^2}{r}$	Sie wächst fortwährend, aber noch langsamer.
90	V	0,000	Die Geschwindigkeit hat ihr Maximum erreicht; die Beschleunigung ist null.
120	0,866 V	$-0,500\,\frac{V^2}{r}$	Die Geschwindigkeit nimmt ab.
150	0,500 V	$-0,866\,\frac{V^2}{r}$	Sie vermindert sich fortwährend, und zwar noch rascher.
180	0,000	$-\frac{V^2}{r}$	Sie ist null und wird von hier aus negativ; die negative Beschleunigung steht im Maximum ihres absoluten Werthes.

Setzt man diese Tafel weiter fort, indem man den Winkel AO'C von 180° bis 360° zunehmen läßt, so sieht man, daß Geschwindigkeit und Beschleunigung dieselben absoluten Werthe wie vorhin, aber mit den entgegengesetzten Vorzeichen, erhalten, wie es auch offenbar der Fall sein muß.

§. 3. Graphische Darstellung der Bewegung eines Punctes.

17. Construirt man eine Curve mit Hülfe zweier Coordinatenaxen so, daß die Abscissen den abgelaufenen Zeiten t, die Ordinaten den zugehörigen Distanzen s des beweglichen Punctes von einem festen Puncte proportional sind (wobei nämlich diese Distanzen auf der vom beweglichen Puncte beschriebenen Linie gemessen werden), so gewährt diese Curve ein sehr ausdrucksvolles Bild der Bewegung und der in ihr vorgehenden Veränderungen, selbst wenn sie abwechselnd vorschreitend und rückgängig wird.

18. Bei der gleichförmigen Bewegung tritt an die Stelle der Curve eine Gerade, deren Neigung gegen die Axe der Zeiten von der Geschwindigkeit des beweglichen Punctes abhängt und von dem Verhältniß der beiden Längen welche man zur Darstellung der Zeiteinheit und der Einheit der Distanzen gewählt hat.

(Zur Uebung zeichne man die verschiedenen Lagen der Geraden, welche der Gleichung $s = s_0 + Vt$ [1] in Nr. 5 entsprechen, je nach den Vorzeichen der Größen s_0 und V.)

19. Ist die Bewegung eine gleichförmig veränderte, so hat die zu ihrer Versinnlichung dienende Curve die Gleichung

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2 \qquad [5]$$

und ist eine Parabel, deren Hauptachse parallel zur Achse der Räume liegt. (GL. Nr. 124.)

(Gelegenheit zu graphischen Uebungen geben wieder die verschiedenen Lagen der Parabel je nach den Vorzeichen von s_0, v_0, j.)

20. Bei der Versinnlichungscurve irgend einer veränderlichen Bewegung gibt das Gefäll der Curve gegen die Axe der Zeiten, oder der auf diese Axe bezogene Neigungscoefficient*) in einem bestimmten Puncte, die Geschwindigkeit im entsprechenden Augenblick an. Dieß folgt aus der Gleichung $v = \frac{ds}{dt}$ oder auch unmittelbar geometrisch aus der in Nr. 9. gegebenen Definition der Geschwindigkeit. Jener Neigungscoefficient und die entsprechende Geschwindigkeit sind numerisch gleich, wenn man bei Construction der Curve den nämlichen Maßstab für die Räume wie für die Zeiten angenommen hat, d. h. wenn eine und dieselbe Länge die Einheit der Distanz und die Einheit der Zeit vorstellt. Ganz allgemein aber erhält man die Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblick, wenn man durch den entsprechenden Punct der Curve eine Tangente an diese zieht, und den Zuwachs mißt, den die Ordinate der Tangente annimmt während die Abscisse um ihre Einheit wächst.

21. An den sinnreichen Apparaten, welche Poncelet ausgedacht und Morin (für seine Versuche über die Reibung) ausgeführt hat, zeichnet der bewegliche Körper selber eine Curve zur Versinnlichung seiner Bewegung. Man bedient sich zu diesem Zwecke entweder einer Cylinderfläche oder einer Ebene, welche sich beide gleichförmig drehen müssen; die Axe der Drehung ist im ersten Falle die geometrische Axe des Cylinders, im zweiten Falle steht sie senkrecht zur Ebene. Während ein Körper sich in gerader Linie nach irgend einem Gesetze bewegt, beschreibt ein an ihm befestigter Zeichnungsstift auf der sich drehenden Fläche eine Curve, mittels deren sich aufeinanderfolgende Lagen

*) Unter dem der Kürze wegen eingeführten Ausdrucke Gefäll oder Neigungscoefficient einer Geraden nach einer Coordinatenaxe versteht man, wenn z. B. die Axe der x gemeint ist und die Gerade die Gleichung $y = ax + b$ hat, den constanten Coefficienten a, welcher im Falle rechtwinkeliger Coordinaten die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Geraden und der Axe ausdrückt. Das Gefäll einer Curve in einem gewissen Puncte ist das Gefäll der Geraden welche die Curve in diesem Puncte berührt. (GL. 88 u. 220.)

des Stifts für verschiedene Augenblicke nachweisen lassen, wenn man nur die zwischenliegenden Zeiträume kennt.

22. Eine geometrische Darstellung der Bewegung kann man auch noch durch eine Curve erhalten deren Abscissen den Zeiten und deren Ordinaten den Geschwindigkeiten proportional sind. Wir wollen der Einfachheit halber rechtwinkelige Coordinatenaxen annehmen, und die verschiedenen Fälle durchgehen welche sich darbieten können.

Ist die Bewegung gleichförmig, so erhält man eine Gerade parallel zur Axe der Zeiten; ihr Abstand von dieser Axe ist die constante Geschwindigkeit; und da bei gleichförmiger Bewegung der zurückgelegte Raum gleich dem Producte aus Geschwindigkeit und Zeit ist (3), so drückt der Flächenraum, welcher durch die Gerade, die Abscissenaxe und zwei zu bestimmten Augenblicken gehörige Ordinaten eingeschlossen wird, den zwischen diesen Augenblicken durchlaufenen Raum aus, wenn man nämlich übereinkommt, daß die Einheit dieses letztern linearen Raumes vertreten werde durch die Fläche des Rechtecks aus der Einheit der auf der Abscissenaxe abgetragenen Zeiten und der Einheit der als Ordinaten genommenen Geschwindigkeiten.

23. Die Versinnlichungslinie, welche man nach dieser zweiten Art erhält, ist auch noch für die gleichförmig veränderte Bewegung eine Gerade, weil die Geschwindigkeit proportional mit der Zeit wächst.

Die Ordinate am Ursprung des Coordinatensystems*) ist die Anfangsgeschwindigkeit. Der Neigungscoefficient der Geraden nach der Axe der Zeiten ist numerisch gleich der Beschleunigung, wenn die nämliche Länge die Einheit der Zeit und die Einheit der Geschwindigkeit abgibt. Allgemeiner ist die Beschleunigung dargestellt durch den Zuwachs der Ordinate welcher einem der Einheit gleichen Zuwachse der Abscisse entspricht. Der von einem bestimmten Augenblicke bis zu einem gegebenen zweiten Augenblicke zurückgelegte Weg wird vorgestellt durch den Flächenraum zwischen der geneigten Geraden, der Axe der Zeiten und den zu jenen Augenblicken gehörigen Ordinaten, wobei aber — falls etwa die Geschwindigkeit während dieses Zeitraums ihr Zeichen geändert hat und durch Null gegangen ist — das oberhalb der Zeitaxe gelegene Flächenstück positiv, das unterhalb liegende negativ zu fassen ist.

Durch diese geometrischen Betrachtungen läßt sich beweisen, daß, wenn die Geschwindigkeit durch die Formel

$$v = v_0 + jt$$

*) Vgl. GL. Nr. 88,3.

gegeben ist, die Distanz des beweglichen Punctes von seiner Anfangslage nach der Zeit t durch

$$e = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2$$

dargestellt wird, welche Zeichen auch v_0 und j haben mögen. Wir unterlassen hier diesen Beweis, weil der Satz bereits früher (11 und 15) durch Rechnung festgestellt wurde.

24. Ist die Bewegung nach irgend einem Gesetze veränderlich, so gibt die Folge der Puncte, deren Abscissen den Zeiten und deren Ordinaten den Geschwindigkeiten proportional sind, eine Curve. Die Fläche zwischen zwei Ordinaten ist auch hier noch der Ausdruck für den zwischen den entsprechenden Augenblicken durchlaufenen Weg, wenn dieser Flächenraum ganz auf einerlei Seite von der Axe der Zeiten liegt. Ein unendlich kleines Stück der Curve kann man als geradlinig betrachten, und mithin die entsprechende Bewegung während ihrer unendlich kurzen Dauer als gleichförmig verändert; ihre Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ ist also dargelegt durch den zugehörigen Neigungscoefficienten der Curve oder ihrer Tangente (10), unter Berücksichtigung der für die Abscissen und die Ordinaten geltenden Einheiten, wie vorhin (20) auseinandergesetzt wurde.

25. Uebungs-Aufgabe. — Es sei die graphische Darstellung einer Bewegung nach der in Nro. 17. angezeigten Weise gegeben; man leite daraus die Darstellung derselben Bewegung nach Nro. 22. ab; und umgekehrt.

§. 4. Analytische Darstellung der Bewegung eines Punctes im Raume.

26. Wenn von den drei Coordinaten x, y, z eines beweglichen Punctes (bezogen auf irgend drei Axen mit gemeinschaftlichem Ursprung) jede als Function der Zeit t gegeben ist, so muß dadurch offenbar die Lage des Punctes für jeden Augenblick bestimmt sein. Das Auftragen dieser Coordinaten auf die drei Axen führt zu den zusammengehörigen Projectionen des beweglichen Punctes, d. h. auf die Schnittpuncte dieser Axen mit drei Ebenen, welche man parallel zu den Coordinatenebenen durch jenen Punct in dem Augenblicke legt wo die Zeit t endet. (Gl. Nr. 18.)

27. Durch Elimination von t aus den drei Gleichungen, welche die Relationen zwischen x, y, z und t aussprechen, erhält man die Gleichungen der beschriebenen Curve, da diese durch die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punctes in jeder beliebigen Lage desselben befriedigt werden müssen.

Beispiel. Eine ebene Curve in der Ebene der xy. — Die Bewegung der Projection P auf der Axe der x sei eine gleichförmige, und die der Projection Q auf der Axe Oy eine gleichförmig veränderte. Legt man den Ursprung O der Axen in den Punct, durch welchen der bewegliche Punct geht wenn die Zeit t beginnt, so hat man (3 u. 11)

$$x = at \qquad \text{und} \qquad y = bt + ct^2,$$

folglich

$$y = \frac{b}{a}x + \frac{c}{a^2}x^2,$$

und dieß ist die Gleichung einer Parabel, deren Hauptaxe parallel zu Oy liegt. (GL. Nr. 124.)

28. Die Ausdrücke von x, y, z in Function von t zeigen die Bewegung jeder Projection des Beweglichen auf den Axen der x, der y und der z. Die Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sind die Geschwindigkeiten dieser Projectionen. Diese Geschwindigkeiten stehen nun mit der Geschwindigkeit des Punctes im Raume in einer leicht wahrzunehmenden Beziehung; nämlich:

Lehrsatz. Die Geschwindigkeit der Projection eines im Raume sich bewegenden Punctes auf eine Axe ist gleich der Projection seiner Geschwindigkeit auf dieselbe Axe.

Beweis. — 1) Bewegt sich der betrachtete Punct im Raume geradlinig und gleichförmig, so ist seine Geschwindigkeit der Raum MN den er in der Zeiteinheit beschreibt; und sind P, Q (Fig. 3) die Projectionen der Puncte M, N auf die Axe Ox mittels der zur Coordinatenebene yOz parallelen Linien MP, NQ, so ist die Strecke PQ die Projection der Geschwindigkeit MN. Da nun diese Strecke von der Projection des Beweglichen auf der Axe Ox in der Zeiteinheit durchlaufen wird, so ist sie zugleich die Geschwindigkeit dieser Projection.

2) Ist die betrachtete Bewegung krummlinig, so sei (Fig. 3)

M die eben stattfindende Lage des Beweglichen;

M_0MM' die von ihm beschriebene Curve;

MN eine Tangente derselben, im Sinne der Bewegung gerichtet, und an Länge gleich der Geschwindigkeit.

Unter der Projection der Geschwindigkeit auf eine Axe ist nun nichts anderes zu verstehen als die Projection von MN auf diese Axe. Wählen wir z. B. die Projection PQ auf Ox und bezeichnen sie mit v_x, so ist zu beweisen daß $v_x = \frac{dx}{dt}$, indem $\frac{dx}{dt}$ der analytische Ausdruck (9) für die Geschwindigkeit der Projection auf jener Axe ist.

Es sei $MM_1 = ds$ der unendlich kleine Bogen welcher längs der Tangente in der Zeit dt durchlaufen wird, und P_1 die Projection von M_1 auf Ox, so daß $PP_1 = dx$. Die Geraden MP, M_1P_1, NQ liegen in drei zur Ebene yOz parallelen Ebenen; daher ist

$$PP_1 : MM_1 = PQ : MN$$

oder

$$dx : ds = v_x : v.$$

Dividirt man die Glieder des ersten Verhältnisses durch dt und schreibt für $\frac{ds}{dt}$ seinen Werth v, so folgt $\frac{dx}{dt} = v_x$, was zu erweisen war.

Man darf nicht übersehen, daß v_x entweder positiv oder negativ ist, und zwar stets einerlei Zeichen mit dx hat, indem dt immer als positiv — im Sinne des Fortschreitens der Zeit — genommen wird.

29. Zusatz. Die Geschwindigkeit des Beweglichen im Raume ist die Diagonale eines Parallelepipeds, dessen Kanten gleich und parallel mit den Geschwindigkeiten der Projectionen des Beweglichen auf drei Coordinatenaxen sind.

30. Die Bezeichnung v_x hat nur insofern eine vollkommen bestimmte Bedeutung, als man die Stellung der mit der Axe Ox coordinirten Ebene yOz kennt.

Handelt sich's von orthogonalen Projectionen, so ist

$$v_x = v \cos(v,x); \quad v_y = v \cos(v,y); \quad v_z = \cos(v,z),$$

und

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad \text{(GL. Nr. 47.)}$$

In diesen Formeln hat v kein Vorzeichen; v_x, v_y, v_z nehmen die Vorzeichen der Cosinus an, welche ihrerseits wieder von dem Sinne der Bewegung auf der im Raum beschriebenen Curve abhängen.

31. Liegt die beschriebene Curve in der Ebene der Axen Ox, Oy, während der Winkel xOy beliebig ist, so bildet die Geschwindigkeit v mit zwei zu v_x und v_y parallelen und ihnen gleichen Geraden ein Dreieck, in welchem der Gegenwinkel von v das Supplement zu xOy ist. Man hat daher, nach bekannten Sätzen der Trigonometrie (GL. Nr. 67. u. 65.),

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + 2v_xv_y \cos(xOy)}$$

$$\frac{v}{\sin(x,y)} = \frac{v_x}{\sin(v,y)} = \frac{v_y}{\sin(v,x)};$$

und wenn der Winkel (x,y) ein rechter ist:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v_x = v \cos(v,x), \quad v_y = v \cos(v,y).$$

32. Beispiele. In dem Beispiel von Nr. 16 ist der Punct M die Projection des Punctes C auf die Axe Ox; dieß gibt unmittelbar

$$\frac{dx}{dt} = V \cos (V,x) = V \sin AO'C.$$

Wird in dem Beispiele von Nr. 27 die Geschwindigkeit des Beweglichen nach der Zeit t verlangt, so hat man

$$v_x = a, \qquad v_y = b + 2ct,$$

also
$$v = \sqrt{a^2 + (b + 2ct)^2}.$$

33. Es verdient besonders bemerkt zu werden, daß der Lehrsatz in Nr. 28 nicht auf Beschleunigungen anwendbar ist; d. h. bei krummliniger Bewegung ist die Beschleunigung $\frac{dv_x}{dt}$ der Projection des beweglichen Punctes auf der Axe der x nicht gleich der auf dieselbe Axe bezogenen Projection der Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$, längs der Richtung der Tangente an der beschriebenen Curve gemessen.*) So ist z. B. in dem Falle der Nr. 16 die Beschleunigung des Beweglichen auf dem Kreise ACE... null, während die Beschleunigung der Projection M den veränderlichen Werth $\frac{V^2}{r} \cos \frac{Vt}{r}$ hat.

§. 5. Von der Geschwindigkeit eines Puncts in Beziehung auf ein in Bewegung begriffenes starres geometrisches System.

34. Definition der relativen Bewegung. — Während ein Punct M irgend eine Bewegung hat, wollen wir uns zugleich vorstellen, daß drei zu einem unveränderlichen Dreikant verbundene Coordinatenaxen ebenfalls irgend eine Bewegung im Raume annehmen, daß aber ein Beobachter, welcher ohne sein Vorwissen an dieser letzteren Bewegung Theil nimmt, jenes Coordinatensystem als unbeweglich betrachtet. (In diesem Falle befinden wir uns fortwährend selbst, bei allen den Untersuchungen der Mechanik, bei welchen wir von der Bewegung der Erde absehen.) Ein solcher Beobachter wird dem Puncte M eine von dessen wahrer Bewegung verschiedene Bewegung zuschreiben, und diese

*) Der Grund davon läßt sich erkennen, wenn man bemerkt, daß z. B. bei orthogonaler Projection $v_x = v \,.\, \cos (v,x)$, und daß also v_x bei einer krummlinigen Bewegung das Product zweier veränderlicher Factoren ist. Die Differentiation gibt

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dt} \cos (v,x) + v \,.\, \frac{d \cos (v,x)}{dt},$$

und nicht blos $\frac{dv}{dt} \cos (v,x)$.

heißt dann relative Bewegung. Sie ist vollständig bestimmt, sobald man in dem beweglichen Axensysteme die Coordinaten des erwähnten Punctes als Functionen der Zeit kennt.

Die Bewegung eines Punctes in Beziehung auf ein an sich unveränderliches, aber bewegliches Axensystem kommt daher überein mit der wirklichen oder absoluten Bewegung eines Punctes, der in einem ähnlichen, jedoch ruhenden Axensysteme für jeden Augenblick dieselben Coordinaten hat wie der erste.

35. Relative Geschwindigkeit. — Die relative Geschwindigkeit, d. h. die Geschwindigkeit der relativen Bewegung, weicht in der Regel sowohl nach ihrer Intensität als nach ihrer Richtung von der absoluten Geschwindigkeit ab. Diese Bemerkung führt auf folgende

Aufgabe. Man soll die Beziehungen bestimmen, welche zwischen der relativen Geschwindigkeit, der absoluten Geschwindigkeit und der Bewegung des Coordinatensystems stattfinden.

Es sei A die Lage des beweglichen Punctes für einen bestimmten Augenblick (Fig. 4), und $AV = v$ eine Gerade, welche die absolute Geschwindigkeit nach Richtung und Intensität vorstellt;

AE sei die Richtung, nach welcher der Punct A — als ein geometrischer Punct betrachtet, der mit dem beweglichen Axensysteme in fester Verbindung steht — durch das System fortgetragen wird, und zwar mit der Geschwindigkeit v_e *), welche die Transportgeschwindigkeit heißen möge.

In einer unendlich kleinen Zeit dt wird der bewegliche Punct in Wahrheit auf der AV nach M rücken, so daß $AM = vdt$; während der am Axensysteme haftende geometrische Punct A nach A′ fortgetragen sein wird, so daß $AA' = v_e dt$. Daher muß der Beobachter, der selbst mit dem Axensysteme entführt wird und deßhalb den Punct A für fest ansieht, dem beweglichen Puncte eine Bewegung zuschreiben, vermöge welcher derselbe in der Zeit dt den unendlich kleinen Raum A′M durchlaufen würde. Bezeichnet man also die relative Geschwindigkeit durch v_r, so hat man $A'M = v_r dt$; mithin sind die Seiten des Dreiecks AMA′ den Geschwindigkeiten v, v_e, v_r proportional.

Wird demnach ein Dreieck AVE so construirt, daß zwei seiner Seiten die absolute und die Transportgeschwindigkeit (nach Intensität und Richtung) darstellen, so gibt die dritte Seite die Intensität der relativen Geschwindigkeit an.

*) Die Bewegung dieses geometrischen Punktes nennt Coriolis mouvement d'entrainement; daher obige Bezeichnung. (Vgl. d. Vorwort.)

36. Denkt man sich die durch Verlängerung des Elements A'M erhaltene Gerade A'R' in Verbindung mit den beweglichen Axen, so ist klar, daß sie im ersten Augenblicke der Zeit dt eine Lage AR einnehmen würde welche mit A'R' nur einen unendlich kleinen Winkel bildet. Nun ist aber diese Gerade die Richtung der scheinbaren Geschwindigkeit für den Beobachter, der die Bewegung der Axen nicht in Anschlag bringt; sie ist daher die Richtung der relativen Geschwindigkeit.

Wo sich's um Darstellung der Richtung einer Geraden handelt, ist ein unendlich kleiner Winkel zu vernachläßigen; daher ist die zur dritten Seite des Dreiecks AA'M parallele Gerade die Richtung der relativen Geschwindigkeit.

37. Vollendet man das Parallelogramm AEVR, in welchem $AR = VE = v_r$, so gelangt man zu folgendem Satze, welcher die Ergebnisse der beiden vorhergehenden Nummern zusammenfaßt.

Lehrsatz. Die absolute Geschwindigkeit ist nach Größe und Richtung dargestellt durch die Diagonale eines Parallelogramms, dessen zusammenstoßende Seiten die relative Geschwindigkeit und die Transportgeschwindigkeit (ebenfalls nach Größe und Richtung) vorstellen.

38. Die Diagonale AV, welche von dem gemeinsamen Puncte A zweier zusammenstoßenden Seiten AE, AR eines Parallelogramms ausgeht, wird die geometrische Resultante dieser Seiten genannt; und andrerseits heißen die Seiten AE, AR die Composanten der Diagonale AV. Der vorstehende Lehrsatz läßt sich hiernach auch in folgender Weise aussprechen:

Die absolute Geschwindigkeit ist die Resultante aus der relativen und der Transportgeschwindigkeit; oder die beiden letztern sind die Composanten der ersten.

Ferner folgt aus der Figur:

Die relative Geschwindigkeit AR ist die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit und einer Geschwindigkeit Ae welche der Transportgeschwindigkeit AE gleich und entgegengesetzt ist.

39. Sind die Transportgeschwindigkeit und die relative Geschwindigkeit parallel, so ist die absolute Geschwindigkeit gleich ihrer Summe oder Differenz, jenachdem beide einerlei oder entgegengesetzten Sinn haben; also überhaupt gleich ihrer algebraischen Summe, wenn man jeder Geschwindigkeit dasjenige Vorzeichen beigibt welches dem Sinne ihrer Richtung entspricht.

40. Beispiel. — Ein Cylinder habe eine bekannte Rotationsbewegung um seine Axe, welche sich in O (Fig. 5) projicirt. Ein beweglicher Punct dringt bei A in den Cylinder ein, mit einer absoluten Geschwindigkeit welche nach Größe und Richtung durch AM dargestellt ist, während die Geschwindigkeit, die der Punct A als Punct des Cylinders besitzt, durch die Tangente AA′ vorgestellt wird. Die nach Vollendung des Parallelogramms AA′MB erhaltene Gerade AB gibt die relative Geschwindigkeit an mit welcher der bewegliche Punct im ersten Augenblicke in den Cylinder eintritt; ihre Richtung ist die, welche man dem ersten Elemente einer geraden oder krummen am Cylinder haftenden Röhre geben müßte, wenn in diese sich der bewegliche Punct ohne Stoß einführen sollte. — Diese Theorie ist anwendbar bei Wasserrädern.

41. Während ein Punct eine gewisse Geschwindigkeit bezüglich beweglicher Axen hat, können diese selbst eine gewisse Bewegung in Beziehung auf andere gleichfalls bewegliche Axen haben; und auf solche Weise läßt sich eine Geschwindigkeit als die Resultante beliebig vieler Composanten betrachten.

Zur Verdeutlichung wählen wir ein Beispiel wobei drei Geschwindigkeiten als Composanten auftreten. Eine Geschützkugel wird von einem Puncte der Erde aus in irgend einer Richtung mit der scheinbaren Geschwindigkeit V′ geworfen; jener Punct an sich besitzt vermöge der Rotation der Erde eine Geschwindigkeit V″ in Beziehung auf die Erdaxe und auf zwei andere Axen, welche die Erdaxe schneiden und parallel mit sich selbst fortrücken; endlich nimmt der nämliche Punct, indem er als ein an das erwähnte Axensystem gebundener Punct aufgefaßt wird, noch Theil an der Translationsbewegung der Erdaxe um die Sonne; diese erfolgt mit einer Geschwindigkeit V‴, welche wir als absolut annehmen, indem das Fortschreiten der Sonne außer Betracht bleibt. Es ist nun klar, daß die absolute Geschwindigkeit des Punctes A, von welchem aus die Kugel geworfen wurde, die Resultante der Geschwindigkeiten V‴ und V″ ist, und durch die Diagonale AC′ (Fig. 6) des Parallelogramms ABC′C vorgestellt wird, dessen Seiten AB, AC diese Geschwindigkeiten darstellen. Die Resultante AC′ ist die Transportgeschwindigkeit des Punctes A; und die absolute Geschwindigkeit der Kugel ist die Resultante AD′ aus AC′ und der durch AD dargestellten Geschwindigkeit V′.

Indem man diese Bemerkungen in's Allgemeinere fortsetzt, und dabei die Fig. 6 genauer betrachtet, sieht man leicht, daß *die Resultante einer beliebigen Anzahl von Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung durch die Gerade (AD′) dargestellt wird, welche ein bei der Lage des Beweglichen entspringendes Polygon ABC′D′... schließt, dessen Seiten AB, BC′, C′D′... den Dar-*

stellungen AB, AC, AD... der einzelnen Geschwindigkeiten gleich und im nämlichen Sinne parallel zu ihnen sind.*)

42. „In Gedanken einem Puncte, der eine gewisse Geschwindigkeit besitzt, noch eine Geschwindigkeit zulegen", heißt: durch eine blose Verstandesoperation an die Stelle der wirklich vorhandenen Geschwindigkeit eine andere setzen, welche die Resultante aus jener und der hinzugegebenen ist. An der relativen Bewegung eines Punctes bezüglich eines beweglichen Axensystems ändert sich nichts, wenn man in Gedanken dem in absoluter Bewegung betrachteten Puncte und dem Axensysteme gleiche und in einerlei Sinn parallele Geschwindigkeiten zulegt; denn dadurch werden die Composanten AV, Ae der relativen Geschwindigkeit AR mit zwei gleichen und entgegengesetzten Composanten vermehrt, welche sich gegenseitig aufheben.

§. 6. Von den verschiedenen Bewegungen eines starren Systems.

43. Nachdem bisher die Bewegung eines einzelnen Punctes abgehandelt worden ist, betrachten wir nun ein System von Puncten, deren gegenseitige Distanzen unveränderlich sind, wie bei geometrischen Figuren; und indem wir dieses System in Bewegung annehmen, wollen wir die Relationen untersuchen denen die Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte unterliegen.

Wir gehen dabei von folgender, leicht zu erweisender Bemerkung aus: Wenn man irgend dreien nicht in gerader Linie liegenden Puncten des starren Systems eine der Bewegungen zuweis't welche sie annehmen können, so ist die Bewegung jedes andern Punctes des Systems als nothwendige Folge bestimmt.

1) Gemeinschaftliche Translationsbewegung nach gerader oder krummer Linie.

44. Die Bewegung eines Systems von Puncten heißt Translationsbewegung, wenn alle diese Puncte in jedem Augenblick gleiche und in einerlei Sinn parallele Geschwindigkeiten besitzen; wobei übrigens diese Geschwindigkeiten mit der Zeit sich nach Intensität und Richtung ändern können.

Aus dieser Definition folgt:

1) daß alle Puncte des Systems congruente Curven beschreiben;

2) daß diese immer in gleichen Entfernungen von einander bleiben;

---

*) Man sagt bisweilen, ein Punct sei gleichzeitig mit mehreren Geschwindigkeiten begabt, oder er besitze mehrere Bewegungen zugleich. Dieser Ausdruck ist nicht in strengem Sinne zu nehmen; denn in einem gegebenen Augenblicke hat ein Punct blos eine absolute Bewegung. Nur bei Betrachtung der relativen Bewegungen findet man die wahre Auslegung jener Redensart.

3) daß die gleichen Geraden, welche die nämlichen Puncte in irgend zwei Lagen des Systems verbinden, parallel sind.

45. In dem besondern Falle, wo die Geschwindigkeiten eine constante Richtung behalten, hat das System eine gemeinsame geradlinige Translationsbewegung.

46. Damit alle Puncte eines starren Systems eine gemeinsame Translationsbewegung haben, ist hinreichend, daß drei nicht in gerader Linie liegende Puncte eine solche Bewegung annehmen (43).

2) Einfache Rotationsbewegung und eine feste Axe.

47. Wenn drei nicht in gerader Linie liegende Puncte eines starren, aber in Bewegung begriffenen Systems unveränderliche Abstände von zwei unbeweglichen Puncten behalten, so ist das Nämliche der Fall mit allen übrigen Puncten des Systems, und man sagt, das System drehe sich um die feste Axe welche durch jene beiden unbeweglichen Puncte bestimmt wird, oder es habe eine einfache Rotationsbewegung um diese Axe.

In diesem Falle bewegen sich alle Puncte des Systems in Ebenen welche senkrecht zur Rotationsaxe liegen; sie beschreiben in der nämlichen Zeit Kreisbögen welche die nämliche Anzahl von Graden haben und folglich den Distanzen der Puncte von der festen Axe proportional sind.

Denkt man sich einen mit dem Systeme verbundenen Punct welcher von der Axe um die Einheit der Distanzen (um 1 Meter) absteht, so heißt der von ihm während einer gewissen Zeit beschriebene Bogen die Winkelverschiebung des Systems in der betrachteten Zeit.

Stellt σ diesen Bogen vor, und ist r die Distanz eines Punctes im Systeme von der Axe, s aber der Bogen den dieser Punct in der gleichen Zeit beschreibt, so hat man

$$s = \sigma r. \qquad [6]$$

48. Aus diesem Grunde sind die Geschwindigkeiten verschiedener Puncte des Systems den Distanzen dieser Puncte von der Axe proportional.

Die Geschwindigkeit, welche ein an das System gebundener und von der Axe um die Einheit der Distanzen entfernter Punct in irgend einem Augenblicke hat, heißt die Winkelgeschwindigkeit des Systems für diesen Augenblick. Ihr Ausdruck ist, der vorigen Bezeichnung gemäß, $\frac{d\sigma}{dt}$. Stellt man sie durch ω dar, so ist Geschwindigkeit v eines um die Distanz r von der Axe entfernten Punctes durch ωr gegeben.

Also
$$v = \omega r. \qquad [7]$$

49. Die Beschleunigung der Bewegung jenes Punctes, der von der Axe um die Einheit absteht, heißt die Winkelbeschleunigung des Systems, und ist durch $\frac{d\omega}{dt}$ ausgedrückt. Die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ des um r von der Axe entfernten Punctes ist, nach der Gleichung [7], $r\frac{d\omega}{dt}$. Somit

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

3) Roll-Bewegung.

50. Man denke sich ein starres System in unveränderlicher Weise an die krumme Oberfläche eines Cylinders von beliebiger Basis gebunden, welcher ohne zu gleiten sich über eine andere, als fest angenommene Cylinderfläche hinwälzt. Dabei beschreibt jeder Punct des Systems eine ebene Curve, welche eine Epicycloide heißt wenn die beiden Cylinder Kreisbasen haben, eine Cycloide aber wenn der feste Cylinder durch eine Ebene ersetzt wird; im letztern Falle beschreiben die auf der Axe des beweglichen Kreis-Cylinders liegenden Puncte gerade Linien.

Die Relation zwischen den Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte im beweglichen System ist leicht zu erkennen, wie auch die Basen der Cylinder gestaltet sein mögen.

Um sie zu finden, setzen wir an die Stelle des beweglichen Cylinders ein ihm einbeschriebenes Prisma von sehr schmalen Seitenflächen. Die durch die Puncte des Systems beschriebenen Curven setzen sich dann aus Bögen zusammen, deren Normalen je diejenige Kante schneiden welche gerade auf dem festen Cylinder liegt, und die gleichzeitigen Geschwindigkeiten der verschiedenen Puncte sind ihren Distanzen von dieser Kante proportional. Diese beiden Eigenschaften sind aber unabhängig von der Breite der Prismenseiten, und werden mithin auch noch für den Grenzfall fortbestehen wo das Prisma in den Cylinder übergeht. Daher sind die Richtungen und die Verhältnisse der Geschwindigkeiten die nämlichen wie wenn die Berührungslinie der beiden Cylinder fest wäre.

Diese Berührungslinie, deren Geschwindigkeit im Augenblicke der Berührung null ist, heißt augenblickliche Rotationsaxe.

51. Anmerkungen.

1) In Wahrheit ist die Berührungslinie zwischen beiden Cylindern im betrachteten Augenblicke nicht fest, weil man ihrem Verweilen auf dem festen Cylinder keinerlei wirkliche Dauer zuschreiben kann; aber ihre Geschwindigkeit ist null, was — wie man (15) gesehen hat — etwas Anderes ist.

2) Die beschriebenen Bögen sind selbst für sehr kurze Zeiten keine Kreisbögen, sondern Curven welche der Cycloide verwandt sind.

3) Der Krümmungsmittelpunct (GL. Nr. 260) einer solchen Curve für einen gegebenen Punct liegt nicht, wie man glauben könnte, auf der entsprechenden augenblicklichen Rotationsaxe.

Um dieß nachzuweisen, nehmen wir — als den einfachsten Fall — eine eigentliche Cycloide (GL. 143) an, indem wir einen auf einer festen Ebene rollenden Cylinder von kreisförmiger Basis voraussetzen, und die Curve betrachten welche einer seiner Puncte beschreibt. Es sei M dieser Punct (Fig. 7), AML die entsprechende Lage des erzeugenden Kreises, TL die Tangente auf welcher er rollt. ML ist die Richtung der Normalen in M (GL. 219). Um einen andern Punct M′ der nämlichen Cycloide zu erhalten, darf man nur einen zweiten Punct N auf dem Kreise wählen, NM′ parallel zur Tangente TL ziehen und dem rectificirten Bogen MN gleichmachen. Wird ferner LL′ = MN gemacht, so ist die Richtung M′L′ die der Normalen in M′. Verlängert man nun MN bis T und zieht MPP′ parallel zu TL, so sieht man, daß, je kleiner MN genommen wird, um so mehr das Dreieck NMP (ähnlich mit NTL) sich einem gleichschenkeligem nähert; als Grenzfall hat man daher MP = MN = NM′ = PP′; mithin nähert sich MP′ dem Doppelten von LL′; und an der Grenze muß die Distanz MC des Punctes M vom Schnittpunct C der beiden unmittelbar benachbarten Normalen ML, M′L′ das Doppelte von ML sein. Nun ist aber diese Distanz MC der Krümmungshalbmesser und der Punct C der Krümmungsmittelpunct der Cycloide für den Punct M (GL. 260). **Folglich ist bei der gewöhnlichen Cycloide der Krümmungshalbmesser für einen Punct M doppelt so groß als die Distanz dieses Punctes von der augenblicklichen Rotationsaxe**, oder vom Berührungspuncte des Erzeugungs-Kreises.

52. Die nämlichen Betrachtungen lassen sich auf ein starres System anwenden, welches in unveränderlicher Verbindung mit einer Kegelfläche steht, während diese Fläche ohne zu gleiten über eine Ebene oder über eine zweite Kegelfläche mit der nämlichen Spitze rollt. Auch hier ist für einen beliebigen Augenblick der Bewegung die Berührungslinie eine **augenblickliche Rotationsaxe, d. h. die Richtungen und die Verhältnisse der Geschwindigkeiten sind dieselben wie wenn diese Axe fest wäre**, während blos ihre Geschwindigkeit null ist. Die Spitze des beweglichen Kegels ist der einzige Punct der in Ruhe bleibt.

53. In den beiden vorstehenden Fällen sind die einem beliebigen Augenblicke entsprechenden Geschwindigkeiten sämmtlich parallel mit einer zur augenblicklichen Rotationsaxe senkrechten Ebene; und die Geschwindigkeiten derjenigen

Puncte, welche in einerlei durch die Rotationsaxe gehenden Ebene liegen, sind senkrecht zu dieser Ebene.

4) Rotationsbewegung um einen festen Punct.

54. Denkt man sich ein System in unveränderlicher Weise an einen Punct gebunden welcher während der Bewegung des Systems fest bleibt, so läßt sich beweisen, daß das System in jedem beliebigen Augenblick eine durch den festen Punct gehende augenblickliche Rotationsaxe hat, wie in dem Falle von Nr. 52.

Da dieser Satz in der industriellen Mechanik keine Anwendung findet, so beschränken wir uns hier auf seine Anführung.

5) Bewegung welche sich aus Translation und Rotation um eine Axe oder um einen Punct zusammensetzt.

55. Ein starres, in Bewegung begriffenes System stehe in unveränderlicher Verbindung mit einer Geraden AB, deren sämmtliche Puncte eine gemeinsame, krummlinige oder geradlinige Translationsbewegung besitzen (44), so daß also diese Gerade ihrer anfänglichen Lage stets parallel bleibt; die außerhalb der Geraden liegenden Puncte des Systems aber sollen eine andere Bewegung haben. In diesem Falle sagt man, die Bewegung des starren Systems sei zusammengesetzt aus der Translationsbewegung der Geraden AB und einer Rotationsbewegung um diese Axe.

Diese Ausdrucksweise steht im Einklang mit den in §. 5 (Nr. 34 u. f.) festgestellten Begriffen. Bringt man nämlich das System in Beziehung mit drei Coordinatenaxen, welche dieselbe Translationsbewegung haben wie die Gerade AB, so wird diese Gerade in relativer Ruhe sein, d. h. in scheinbarer Ruhe für einen Beobachter der unbewußt an der gemeinsamen Bewegung der Axen theilnimmt; und die scheinbare oder relative Bewegung des ersten an die Gerade AB gebundenen Systems zeigt sich demnach als eine Rotationsbewegung um diese Gerade.

56. Die Bewegung der Erde liefert ein merkwürdiges Beispiel einer solchen Zusammensetzung zweier einfachen Bewegungen. Die Axe unseres Planeten bleibt parallel mit einer und derselben Richtung, während der Mittelpunct im Laufe eines Jahres eine Ellipse beschreibt, deren einen Brennpunct der Mittelpunct der Sonne einnimmt; man nennt dieß die jährliche Bewegung der Erde. Die Bewegung des Planeten in Beziehung auf coordinirte Axen welche mit dem Mittelpuncte fortrücken, jedoch parallel mit ihren ersten Lagen, ist eine einfache gleichförmige Rotationsbewegung um die durch die Pole gehende Gerade.

Die ungemein große Entfernung der Fixsterne von der Erde erlaubt, die Geraden, welche man zu beliebigen Zeiten von der Erde aus nach dem nämlichen Sterne zieht, als parallel zu betrachten. Hieraus läßt sich erklären, warum man die Dauer einer Umwälzung der Erde in ihrer relativen Rotationsbewegung (wie sie eben definirt wurde) einen Sterntag genannt hat. Diese Dauer beträgt unwandelbar 86164 Secunden; während der Sonnentag, dessen mittlere Dauer 86400 Secunden ausmacht, sich mit der Lage der Erdaxe gegen die Sonne verändert.

57. Welcher Art auch die Bewegung eines starren Systems sein möge, — immer kann man sich durch einen seiner Puncte, A, drei Coordinatenaxen denken, welche mit dem Puncte A fortgetragen werden, aber ihren anfänglichen Richtungen parallel bleiben; und dann reducirt sich die Bewegung des Systems bezüglich dieser Axen auf eine Rotationsbewegung um den als fest betrachteten Punct A (54). Also läßt sich die allgemeinste Bewegung eines starren Systems als zusammengesetzt ansehen aus einer Translationsbewegung welche durch die absolute Bewegung irgend eines seiner Puncte bestimmt wird, und einer relativen Rotationsbewegung um diesen Punct.

Zweites Kapitel.

Die Kräfte, unabhängig vom Maß ihres Effects betrachtet.

---

§. 1. Begriff der Kraft, ihrer Intensität, ihrer Projection auf eine Axe.

58. Wir betrachten die Körper als aus Elementen zusammengesetzt, welche einander mehr oder weniger nahe liegen, von unveränderlicher Gestalt und äußerst klein sind; diese Elemente nennen wir materielle Puncte.

Als Sache der Erfahrung und als Grund-Princip wird in der Mechanik angenommen, daß ein materieller Punct weder vom Zustande der Ruhe aus sich in Bewegung setzen, noch seine Geschwindigkeit (wenn er eine solche besitzt) nach Größe oder Richtung ändern kann, wenn nicht zu gleicher Zeit eine äußere Ursache auf ihn einwirkt.

Diese Eigenschaft der Materie nennt man ihre Trägheit.

Die äußere Ursache heißt Kraft.

59. Verschiedene Thatsachen lassen sich, wenn nicht als strenge Beweise für die Existenz der Trägheit, doch wenigstens als Beispiele von den Folgen derselben anführen.

1) Reisende im Wagen oder im Schiff nehmen, wenn der Gang des Fahrzeugs sich beträchtlich beschleunigt oder verzögert, eine relative Bewegung an, welche daher rührt daß sie in der vorher erlangten Bewegung beharren.

2) Wenn man in einem Gefäße mit weiter Oeffnung eine Flüssigkeit trägt, und seine Schritte plötzlich anhält oder übereilt, so erfolgt (aus dem vorigen Grunde) ein Ausschütten der Flüssigkeit über den vordern oder den hintern Rand der Oeffnung.

3) Arbeiter benützen häufig die Trägheit, um die Handhabe eines Werkzeugs fest einzutreiben.

4) Bauhandwerker ziehen Vortheil aus der Trägheit beim Aufladen eines Werkstücks auf den bekannten zweiräderigen, mit Handdeichsel versehenen Steinkarren. Der Karren ist zuerst nach hinten umgekippt; sein Tragbrett berührt mit dem hintern Rande den Boden, und auf diese schiefe Ebene wird der Stein aufgeschoben. Es handelt sich nun darum, die Last gegen die Mitte vorzurücken, damit sie über der Axe zu liegen kommt. Zu diesem Ende drücken die vorn an der Deichsel beschäftigten Leute diese mit rascher Bewegung nieder, so daß sie auf den Boden aufstößt. Die Rotationsbewegung des Tragbretts wird plötzlich unterbrochen; aber der Stein fährt vermöge der Trägheit fort sich zu erheben, und macht einen kleinen Sprung, während dessen die hinten stehenden Arbeiter ihn vorwärts drängen. Auf solche Art ist für kurze Zeit die Berührung zwischen dem Stein und dem Tragbrette aufgehoben worden, und solange war also keine Reibung vorhanden; die combinirte Wirkung der Schwere und der von den Arbeitern aufgebotenen Anstrengung läßt den Block auf der Ebene vorschreiten, welche jetzt nach vorn geneigt ist. Das nämliche Manöver wiederholt man mehrmals, d. h. man hebt die Deichsel und bewegt sie lebhaft abwärts bis sie an der Erde aufschlägt, wobei der Stein nach und nach bis an die erforderliche Stelle vorgeschoben wird.

5) Ein durch eine Schleuder geworfener Stein entfliegt längs der Tangente der von ihm beschriebenen Curve, in dem Augenblicke wo eine Schnur der Schleuder losgelassen wird. Bis dorthin hatte die combinirte Wirkung der Schnüre und der Schwere eine Kreisbewegung bestimmt.

60. Das Wort *Trägheit* bedeutet in der Mechanik nicht Unthätigkeit; denn alle Theile der Materie wirken gegenseitig auf einander ein, nach dem allgemeinen Gesetze welches Newton erkannt hat. Eben so wenig ist damit ein absoluter Widerstand gegen gewisse Kräfte gemeint; denn die geringste Kraft würde einen Körper in Bewegung setzen wenn *sie allein* auf ihn einwirkte, wie wir später zeigen werden.

61. Nach dem Bisherigen ist eine Kraft *die nothwendige und hinreichende Ursache für die Abänderung der Geschwindigkeit eines materiellen Punctes nach Größe oder Richtung.*

Die Idee der Kraft (das Wort im Sinne der Mechanik genommen) wird in uns hervorgerufen durch das Gefühl welches wir haben, wenn wir einen Körper in Bewegung setzen; oder wenn wir eine Bewegung, die er schon hat, zu modificiren suchen; oder wenn wir die Bewegung verhindern, die er ohne unsere Abwehr annehmen würde. Da aber noch andere Ursachen als die Thätigkeit unserer Muskeln ähnliche Wirkungen hervorbringen wie unsere eigene Anstrengung, so liegt es nahe, die aus unserer Erfahrung entnommene Idee der Kraft auch auf solche Ursachen überzutragen.

Eine Kraft ist also immer etwas dem Drucke Analoges, den wir auf einen Körper ausüben um seine Bewegung zu veranlassen oder zu modificiren.

So lange die Geschwindigkeit eines materiellen Punctes wächst oder abnimmt, oder auch ihre Richtung ändert, so lange besteht und wirkt die Kraft welche zur Erzeugung dieser Modification nothwendig ist. (Die beiden Worte bestehen und wirken, von einer Kraft gebraucht, sind völlig gleichbedeutend.) Hört die Kraft auf, so hört im nämlichen Augenblicke auch die Modification der Bewegung auf, und vermöge der Trägheit dauert der letzte Geschwindigkeitszustand fort. Von da an, und so lange der Körper sich selbst überlassen bleibt, behält er seine Geschwindigkeit; aber man darf nicht sagen er behalte seine Kraft, denn damit würde man dem Worte Kraft einen andern Sinn beilegen als den oben definirten.

62. Die Kräfte erhalten je nach Umständen verschiedene Benennungen, wie Zug, Anziehung, Schwere, Gewicht, Spannung, Pressung, Schub, Abstoßung, Rückwirkung rc. In allen Fällen ist aber das Wesen der Kräfte dasselbe, in dem Sinne nämlich, daß sie gleiche Geltung haben mit einer wirksamen Thätigkeit oder mehreren vereinigten Thätigkeitsäußerungen, ähnlich denen, die wir auf die von uns berührten Körper ausüben.

63. Alle Kräfte in der Natur setzen sich aus Elementarwirkungen zusammen, und diese sind die einzigen wirklich existirenden Kräfte; die übrigen sind Auffassungsformen unseres Verstandes, und erscheinen in der Wissenschaft als Summen oder Resultanten, wie man später sehen wird. So wirkt z. B. die Schwere auf die kleinsten Theilchen der Körper, und das Gewicht eines Körpers ist nichts anderes als die Summe aus den Gewichten seiner Massenelemente. Wenn wir einen Körper mit der Hand drücken, können wir uns die Fläche der Finger, soweit sie sich an den Körper anlegen, in Elemente zerlegt denken, deren jedem ein kleiner Druck entspricht, und die Gesammtkraft, welche der Körper von unserer Hand empfängt, ist zusammengesetzt aus diesen Druckelementen.

Eine wirklich bestehende elementare Kraft wirkt nothwendig auf einen gewissen Punct eines Körpers; dieser Punct heißt der Angriffspunct der Kraft.

64. Jede Kraft hat das Bestreben, ihren Angriffspunct, wenn dieser vereinzelt vorhanden und Anfangs in Ruhe wäre, nach einer bestimmten geraden Linie fortzubewegen; die Richtung dieser geraden Linie heißt die Richtung der Kraft.

65. Man kann sich vorstellen, daß mehrere Kräfte gleichzeitig den nämlichen Punct nach der nämlichen Geraden und im nämlichen Sinne

angreifen; die einzige Kraft, welche dann statt ihrer gesetzt werden kann, heißt ihre Summe.

66. Hiernach läßt sich das Verhältniß zwischen irgend zweien Kräften mittels eines gemeinschaftlichen Maßes genau oder angenähert darstellen; in der Art, daß der numerische Ausdruck einer Kraft abhängig ist von der Wahl einer Kraft-Einheit und von dem Verhältniß der betrachteten Kraft zu dieser Einheit.*)

67. Die rationelle Mechanik läßt sich — unter reintheoretischem Gesichtspuncte — studiren, ohne daß die Wahl einer Krafteinheit festgestellt

*) Die oben auseinandergesetzten Begriffe in Betreff der Kräfte und ihrer Verhältnisse sind nicht immer ohne Widerspruch angenommen worden. D'Alembert (Traité de dynamique, Vorrede p. XXII. der Ausg. v. 1758) sagt: „Wir haben nur insoferne eine sichere und bestimmte Vorstellung bei dem Worte Kraft, als wir dasselbe auf den Ausdruck einer Wirkung beschränken." Carnot ist der nämlichen Meinung, und spricht sich gegen den Gebrauch des Wortes Kraft als Ausdruck einer Ursache in folgenden Worten (Principes de l'équilibre et du mouvement, Vorrede p. XII., Ausg. v. 1813) aus: „Welche klare Idee soll hier der Name Ursache dem Geiste erwecken? Es gibt so vielerlei Ursachen! Und was soll man in der bestimmten Sprache der Mathematik unter dem Mehrfachen einer Kraft verstehen, d. h. unter einer Ursache die das Doppelte, Dreifache 2c. einer andern ist? Worin besteht das Verhältniß zweier verschiedenen Ursachen? Liegen diese Ursachen im freien Willen oder in der physischen Constitution des Menschen oder Thieres, durch dessen Thätigkeit Bewegung erzeugt wird? Aber was ist ein doppelter oder dreifacher Wille, oder eine physische Constitution welche zwei- oder dreimal soviel leisten kann als eine andere? Der Begriff des Verhältnisses zwischen den Kräften, als Ursachen betrachtet, ist daher nicht deutlicher als der Begriff dieser Kräfte selbst."

Die ganze auf solche Art erhobene Schwierigkeit reducirt sich, wie wir glauben, darauf, klar festzustellen was es heißen solle, eine Kraft sei einer zweiten gleich, und eine Kraft sei das Doppelte oder Dreifache einer andern; denn das Bewußtsein von dem, was eine Kraft ist, beruht auf einem einfachen, ursprünglichen Begriffe, der uns durch die Erfahrung geläufig ist, wie der Begriff des Raumes und der Zeit.

Nun begreifen wir aber 1) mit hinreichender Klarheit, daß zwei Kräfte, welche abwechselnd von zwei verschiedenen Agentien auf einen Körper unter übrigens gleichen Umständen ausgeübt werden, dieselben Wirkungen, die nämlichen Modificationen der Bewegung hervorbringen können; diese beiden Kräfte sind also gleich, obschon vielleicht die eine z. B. aus dem Willen und der physischen Constitution eines Thieres entspringt, die andere aus der Elasticität des Dampfes der auf einen Kolben drückt. Allerdings erkennen wir die Gleichheit beider Kräfte blos aus ihren Wirkungen; dieß ist aber noch kein Grund um, wie Carnot thut, der Ursache und der Wirkung den nämlichen Namen zu geben.

2) Mit derselben Klarheit begreifen wir, wie zwei oder drei gleiche Kräfte gleichzeitig und nach einerlei Richtung ein Bewegliches angreifen können; und damit haben wir eine bestimmte Vorstellung von einer Kraft welche das Doppelte oder Dreifache einer andern ist.

Ueber gewisse Bedeutungen, welche man sonst noch dem Worte Kraft beigelegt hat, vergleiche man die Noten zu Nr. 72, 81, 157, und die Nr. 294.

wird. Wenn aber auch diese Wahl nicht nothwendig ist, so ist es doch als Vorbereitung für industrielle Anwendungen nützlich, sich gleich von Anfang an darüber zu entscheiden.

Die von uns angenommene Einheit ist das Kilogramm.

Definition. Wird in ein an einem feinen Faden aufgehangenes Gefäß ein Kubik-Decimeter Wasser von $4^0,1$ C Temperatur gegossen, so beträgt der Zuwachs der Kraft, welche durch Vermittelung des Fadens auf dessen Befestigungspunct wirkt, ein Kilogramm, wenn der Versuch im leeren Raume und unter der Breite von Paris vor sich geht.

Verschiedene Instrumente, wie Wagen und Federn, können dazu dienen die Gleichheit zweier Kräfte nachzuweisen, und folglich auch das Verhältniß zweier ungleichen zu finden.

68. Man stellt sehr häufig eine Kraft durch eine begrenzte gerade Linie dar, deren eine Grenze der Angriffspunct der Kraft ist; die Richtung dieser Linie, von diesem Puncte aus gedacht, ist die Richtung der Kraft; und die Länge der Linie gibt durch Vermittelung eines zu Grund gelegten Maßstabes die Intensität der Kraft an.

69. Wir werden öfters von der Projection einer Kraft auf eine Axe zu sprechen haben. Darunter versteht man die Kraft, welche sowohl der Größe als der Richtung nach durch die Projection derjenigen Geraden vorgestellt wird, deren man sich zur Darstellung der Kraft im Raume bedient hat.

Ist also (Fig. 8.) eine Kraft F durch die Linie MN dargestellt, so stellt PQ eine andere Kraft vor, und diese ist die Projection der F auf die Axe Ox; wir bedienen uns für dieselbe der Bezeichnung F_x, welche überdieß mit einem negativen Vorzeichen zu verbinden wäre falls die Richtung der Kraft dem Sinne der positiven x entgegengesetzt seyn sollte.

Bei orthogonaler Projection hat man

$$F_x = F.\cos(F, x).$$

Diese Größe hat das Vorzeichen des Cosinus, ist also positiv oder negativ jenachdem der Winkel der Kraft F gegen Ox spitz oder stumpf ist.

§. 2. Vom Antrieb einer Kraft.

70. Jede Kraft, welche wirklich auf einen Körper einwirkt, hat nothwendigerweise eine gewisse Dauer, während welcher sie übrigens ihre Intensität ändern kann.

Lange Zeit haben die Gelehrten angenommen, es gebe in der Natur zwei verschiedene Arten von Kräften; nämlich einerseits Kräfte ohne alle Dauer, aber mit der Fähigkeit in den Körpern plötzliche und übergangslose Aenderungen der Geschwindigkeit hervorzubringen; andererseits Kräfte von stetiger, ununterbrochener Thätigkeit welche demnach nur in meßbaren Zeitabschnitten merkliche Wirkungen zu erzeugen vermöchten. Die erstern nannte man augenblickliche oder Stoß-Kräfte; die letztern beschleunigende Kräfte.

Nachdem aber eine gesunde Physik dargethan hat, daß alle Wirkungen in der Natur stetig erfolgen, ist man heutzutage allgemein darüber einig, den Stoßkräften keinen Platz mehr in der Wissenschaft einzuräumen, und nur solche Kräfte anzuerkennen, deren Wirksamkeit immer eine gewisse (oft sehr kurze, oft unbestimmbar ausgedehnte) Dauer haben, und deren Intensität — wenn sie auch sehr groß sein kann — sich doch immer auf eine und dieselbe Einheit (wie das in Nr. 67. definirte Kilogramm) beziehen und mit ihr vergleichen läßt. *)

71. Definition. Wenn eine Kraft F von constanter Intensität während einer gewissen Zeit t wirkt, so verstehen wir unter dem **Antrieb** (impulsion) dieser Kraft in der Zeit t das Product Ft aus ihrer Intensität und ihrer Wirkungsdauer.

Hat die Kraft eine veränderliche Intensität, so ist ihr **Antrieb** während eines bestimmten Zeitraums das Integral $\int F dt$ des Products aus der Kraft und dem Differential der Zeit, zwischen den Grenzen jenes Zeitraums genommen.

Diese Größe ist unabhängig von der Geschwindigkeit des Angriffspunctes der Kraft.

72. Wird eine Kraft F auf eine Axe Ox projicirt (69), so ist das Product $F_x t$, falls die Kraft constant ist — oder das Integral $\int_0^t F_x dt$, falls sie veränderlich ist, eine positive oder negative Größe, welche wir den Antrieb der auf die Axe Ox projicirten Kraft in der Zeit t nennen.

Wie nützlich die Einführung dieser Art von Größen ist, wird sich bald (Nr. 155 u. f.) zeigen. **)

---

*) Diese Lehre, welche die Stoßkräfte beseitigt, wurde von Poncelet vorgetragen in seinen Vorlesungen an der Artillerie- und Genie-Schule zu Metz seit 1825, und von Coriolis in seinem Traité du calcul de l'effet des machines, 1829. Poisson nahm sie auf in die zweite Auflage seines Traité de mécanique, 1835.

**) Wenn zwei Körper sich bis auf jenen Grad nähern welcher ihren physischen Contact bedingt, so kann ihre gegenseitige Einwirkung entweder sich in's Unbestimmte fortsetzen oder von nur sehr kurzer Dauer sein. Die ältere Lehre machte einen Unterschied zwischen diesen beiden Fällen; im ersten Falle sagte man, die Körper wirkten

§. 3. Von den bewegenden und den widerstehenden Kräften, und von ihrer Arbeit.

73. Eine andere Größe, welche in den wichtigsten Lehren der Mechanik auftritt (und besonders in der dynamischen Theorie der Maschinen), ergibt sich aus der Combination der Kräfte mit den von ihren Angriffspuncten durchlaufenen Wegen.

Es sei ein Punct aus irgendwelchen Ursachen in Bewegung; wir betrachten aber von den Kräften, welche etwa diesen Punct gleichzeitig angreifen und auf seinem Wege begleiten, nur eine, abgesondert von den andern. Es sei

F die Intensität dieser Kraft, ausgedrückt in Kilogrammen, und während einer unendlich kleinen Zeit als constant betrachtet;

ds der unendlich kleine Weg den ihr Angriffspunct während dieser Zeit beschreibt;

cos (F, ds) der Cosinus des Winkels zwischen F und ds, d. h. des Winkels der Kraft gegen den beschriebenen Weg, der hier zusammenfällt mit seiner im Sinne der Bewegung gerichteten Tangente.

Definition. Unter der elementaren Arbeit oder dem Arbeits-Element der Kraft F in der Ausdehnung des Wegs ds versteht man das unendlich kleine Product

$$F \,.\, ds \,.\, \cos (F, ds).$$

Dieses Product aus drei Factoren kann auch als das Product aus einer Kraft und einer unendlich kleinen Länge gelten, und zwar unter zwei verschiedenen Auffassungen; nämlich:

1) Unter der Form $F\,[ds \,.\, \cos (F, ds)]$ erscheint die elementare Arbeit der Kraft F als das Product aus dieser Kraft und der orthogonalen Projection $ds \,.\, \cos (F, ds)$ des Weges ds auf die Richtung der Kraft.

2) Unter der Form $ds\,[F \,.\, \cos (F, ds)]$ ist die elementare Arbeit der Kraft F das Product aus dem Wege ds und der orthogonalen Projection

---

auf einander durch Druck; im zweiten, sie wirkten durch Anstoß oder Antrieb (Impuls). Der Druck war genau das was wir ausschließlich eine Kraft nennen. Was man aber bald als Impulsivkraft oder Kraft des Antriebs, bald einfach als Impuls oder Antrieb bezeichnete, war in Wahrheit das Product aus der (als constant vorausgesetzten) gegenseitigen Einwirkung beider Körper multiplicirt mit der Dauer dieser Einwirkung. (Mécan. analyt. de Lagrange, tome I, p. 256; tome II, p. 66.) Die einzige Neuerung, die wir uns erlaubten, ist, daß wir das Wort Kraft vor dem Worte Antrieb weglassen, aber letzterem Ausdrucke eine Definition unterlegen welche alle möglichen Kräfte, in Beziehung auf ihre längere oder kürzere Dauer betrachtet, umfaßt, und mit der neuern, die augenblicklichen Kräfte ausschließenden Theorie in Einklang steht.

der Kraft auf die Tangente welche die geometrische Verlängerung des Wegstücks ds darstellt.

Wir fassen diese Definition in der Formel zusammen

$$d\,\mathfrak{T}F = F \,.\, ds \,.\, \cos\,(F, ds), \qquad [8]$$

in welcher das Zeichen $\mathfrak{T}F$ die Bedeutung Arbeit (travail) der Kraft F hat.*)

74. Definition. In Folge des Vorigen ist die Arbeit einer Kraft F zwischen irgend zwei bestimmten Lagen ihres Angriffspuncts das Integral des vorhergegangenen Ausdrucks oder die Summe der elementaren Arbeiten dieser Kraft zwischen den beiden betrachteten Grenzen; und dieß wird ausgedrückt durch die Formel

$$\mathfrak{T}F = \int F \,.\, ds \,.\, \cos\,(F, ds). \qquad [9]$$

75. In den vorstehenden Definitionen und Formeln sind die Kraft F und der Weg ds wesentlich positive Größen, während der numerische Factor cos (F, ds) positiv oder negativ ausfällt, jenachdem der Winkel zwischen F und ds kleiner oder größer als ein rechter ist.

Die positive Arbeit nennt man öfters Bewegungsarbeit (travail moteur), und die negative Widerstandsarbeit (travail résistant).

Die Kräfte deren Arbeit bewegend ist, d. h. deren Richtungen mit der Bewegungsrichtung ihres Angriffspunctes spitze Winkel bilden, heißen bewegende Kräfte; diejenigen aber, welche stumpfe Winkel mit jener Richtung machen, werden widerstehende Kräfte genannt.

76. In dem besondern Falle wo die Kraft und das Weg-Element in der nämlichen Geraden liegen, hat der Cosinus den Werth + 1 oder — 1, und die elementare Arbeit ist das Product aus Kraft und Weg, welches positiv oder negativ wird, jenachdem jene beiden dem Sinne nach übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

77. Wenn eine Kraft beim Fortrücken ihres Angriffspunctes stets normal auf der von letzterem beschriebenen Linie bleibt, so ist der Cosinus null, und die Arbeit dieser Kraft ist also ebenfalls null.

78. Aus den vorhergegangenen Definitionen zieht man ferner mit Leichtigkeit die nachstehende Folgerung. Befindet sich unter den Ursachen, welche

*) Der sehr bezeichnende Name Arbeit einer Kraft wurde durch Coriolis und Poncelet eingeführt, an der Stelle des unsichern Ausdrucks Quantität der Wirkung (quantité d'action) und anderer die ebenfalls wenig befriedigen konnten.

einen Punct zwingen eine gewisse Curve zu durchlaufen, eine nach Intensität und Richtung constante Kraft, welche also ihren Angriffspunct in paralleler Verschiebung begleitet, so erhält man die Arbeit dieser Kraft für eine beliebige Strecke des vom Angriffspuncte beschriebenen Weges, wenn man die Sehne dieser Wegstrecke auf eine zur Kraft parallele Gerade projicirt und diese Projection mit der Kraft multiplicirt (vgl. GL. 46; 281); das Product wird positiv oder negativ, jenachdem der Endpunct der Wegstrecke sich auf die positive oder negative Seite jener Axe, projicirt welche man aus der Anfangslage des Angriffspunctes parallel mit der Kraft und in gleichem Sinne mit ihr zieht.

79. Macht endlich eine Kraft von constanter Intensität stets den nämlichen Winkel mit dem durchlaufenen Weg-Elemente ds, so ist die Arbeit gleich dem Producte aus dem ganzen Wege und der rechtwinkeligen Projection der Kraft auf die Tangente des Weges; diese Projection aber ist positiv oder negativ, jenachdem der Winkel zwischen den Richtungen der Kraft und des Weges (jede in ihrem gehörigen Sinne genommen) spitz oder stumpf ist.

80. Als Einheit der Arbeit bietet sich für die Praxis am natürlichsten die Kraft eines Kilogramms dar welche in der Erstreckung eines Meters wirkt, wobei Kraft und Weg einerlei Richtung haben. Diese Einheit heißt (nach Poncelet's Vorschlag) Kilogrammeter, und wird bezeichnet durch $1^{kg.m.}$

Die durch tausend Kilogrammeter ausgedrückte Arbeitsgröße nennt Coriolis Dynamode.

81. Die Arbeit einer Kraft für einen bestimmten Lauf ihres Angriffspunctes ist, ihrer Definition zufolge, unabhängig von der Zeit, d. h. von der Dauer dieses Laufes. Doch ist es in der practischen Mechanik manchmal wünschenswerth, eine Arbeit genauer bezeichnen zu können, welche sich unbestimmt verlängert und in gleichen Zeiten gleiche Werthe behält. Man könnte als Einheit für eine solche Arbeit ein Kilogrammeter auf die Secunde nehmen; gewöhnlich aber wird in der Industrie von einer andern Einheit Gebrauch gemacht. In Frankreich ist man ziemlich allgemein übereingekommen, als Grundlage der Vergleichung eine stetige Arbeit von $75^{kg.m.}$ auf die Secunde gelten zu lassen, welche wir mit mehreren Schriftstellern ein Dampf-Pferd (cheval-vapeur) oder dynamisches Pferd nennen.

Der für diese Größe manchmal gebrauchte Name Pferdekraft dünkt uns ungeeignet; er ist eine unrichtige Uebersetzung des englischen Ausdrucks horse power, Vermögen eines Pferdes (puissance de cheval). In diesem Falle hat das Wort Vermögen den Sinn von Arbeitsfähigkeit (Tüchtigkeit, Umfang der Leistung), und es hat keinerlei Anstand, ihm diese Bedeutung in der Mechanik beizulegen. Bei jener unpassenden Benennung

aber läuft der Anfänger im Studium dieser Wissenschaft Gefahr, die einfache Vorstellung der **Kraft** mit der zusammengesetzten Vorstellung der **Arbeit** zu verwechseln. Eine Kraft wird in Kilogrammen ausgedrückt; eine Arbeit oder ein mechanisches Vermögen in Kilogrammetern.

Wir können z. B. sagen: ein Vermögen von acht Pferden, eine Arbeit von zehn Pferden; aber wir werden vermeiden, von der Kraft von acht oder zehn Pferden zu sprechen.*)

82. Die Arbeit einer Kraft kann, wie jedes bestimmte Integral, durch den Flächenraum einer Curve dargestellt werden, so nämlich, daß die numerischen Ausdrücke für beide einander gleich sind. Als Abscissen dieser Curve hat man die aus einem bestimmten Puncte gemessenen Wege zu nehmen, als Ordinaten die entsprechenden Werthe der auf die Richtung des Weges projicirten Kraft. Die numerische Berechnung der Fläche oder der von ihr dargestellten Arbeit geschieht entweder durch genaue Integration oder nach Näherungsmethoden.

Beispiel. Arbeit eines sich abspannenden Gases. — Ein in einem Cylinder beweglicher Kolben wird auf seiner einen Seitenfläche, deren Inhalt A ist, von einem Gase gedrückt. Das Volum V_0 des Gases im anfänglichen Augenblick ist gleich dem cylindrischen Raume AL_0, von der Basis A und der Länge L_0. Der Gesammtdruck, den das Gas in diesem Augenblicke auf den Kolben übt, sei durch F_0 bezeichnet. Im Verlaufe der Bewegung wächst das Volum des Gases um den von der Kolbenfläche beschriebenen Raum, während das Gewicht des Gases unveränderlich bleibt. Es wird

*) Carnot sagt (Principes de l'équil. et du mouv., p. 34): Für die Werthbestimmung der von belebten Motoren ausgeübten Thätigkeitswirkung bieten sich zwei gleichnatürliche Mittel dar; das eine besteht darin, daß man zusieht welche Last z. B. ein Mensch zu tragen im Stande ist, oder welche Anstrengung (nach Pfunden geschätzt) er verträgt, wenn er völlig in Ruhe bleibt; das andere, daß man nach der Leistung fragt deren er in einer gegebenen Zeit fähig ist. Dieß zugebend, halten wir nur für nothwendig, daß man nicht durch eine und dieselbe Benennung diese beiden Seiten, von denen die Kräfte in's Auge gefaßt werden können, vermenge, nämlich ihre Intensität und ihre Arbeit.

D'Aubuisson (Traité d'hydraulique, p. 334) besteht darauf, man habe in der Technik von jeher gesagt und werde also auch ferner sagen: „Die **Kraft** eines Stroms, einer Maschine, eines Pferdes." Nichtsdestoweniger gibt er dem Worte Kraft das Adjectiv dynamisch bei, um die Idee der Arbeit auszudrücken, und nennt die im eigentlichen Sinne gedachte Kraft statische Kraft, wie wenn die im Zustande des Gleichgewichts wirkenden Kräfte von anderer Natur wären als die, welche während der Bewegung thätig sind. Wir unsererseits können uns nicht entschließen, dem hergebrachten Brauche die Genauigkeit zu opfern.

angenommen, daß der vom Gas ausgeübte Druck sich im umgekehrten Verhältniß mit seinem Volumen ändere; einem Gesetze gemäß, auf welches wir zurückkommen wenn wir von den Gasen handeln werden. Man verlangt nun die aus diesem Drucke entspringende Arbeit vom anfänglichen Augenblicke an bis zu demjenigen wo das Volum des Gases $V = AL$ geworden ist.

Für irgend einen zwischenliegenden Augenblick sei das Gas-Volum durch Ax bezeichnet, wobei die Länge x der lineäre Raum zwischen dem Kolben und einem Ursprunge ist welcher um die Distanz L_0 rückwärts von dessen anfänglicher Stellung liegt. Das Verhältniß dieses Volums zum anfänglichen Volum ist $\frac{x}{L_0}$; der Druck auf die Kolbenfläche beträgt nach dem angenommenen Gesetze $\frac{F_0 L_0}{x}$; und während der Kolben um eine unendlich kleine Strecke vorrückt — welche ein Zuwachs von x ist und durch dx bezeichnet sein soll — ist die Arbeit aller der Kräfte, welche das Gas in der Richtung der Bewegung auf die Elemente der Kolbenfläche wirken läßt, $= \frac{F_0 L_0}{x} dx$. Durch Integration (GL. 288) findet man die gesammte Arbeit; nämlich

$$T = F_0 L_0 \int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x} = 2{,}3026.\ F_0 L_0 \log. \frac{L}{L_0} = 2{,}3026 \frac{F_0}{A} V_0 \log. \frac{V}{V_0}.$$

In Ermangelung von Logarithmentafeln berechnet man das Integral $\int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x}$ durch die Simpson'sche Formel (GL. 302).

Es sei z. B. $L = 4L_0$. Theilt man die Strecke $L - L_0$ oder $3L_0$ in vier gleiche Theile, so sind die Abscissen der Grenzpuncte und der drei Zwischenpuncte, sowie die zugehörigen Werthe von $y = \frac{1}{x}$ aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen:

$x_0 = L_0$	$x_1 = \frac{7}{4} L_0$	$x_2 = \frac{10}{4} L_0$	$x_3 = \frac{13}{4} L_0$	$x_4 = 4L_0$
$y_0 = \frac{1}{L_0}$	$y_1 = \frac{4}{7L_0}$	$y_2 = \frac{4}{10L_0}$	$y_3 = \frac{4}{13L_0}$	$y_4 = \frac{1}{4L_0}$

also $$\int_{L_0}^{L} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{L - L_0}{4} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + \frac{1}{4} + 4 \left(\frac{4}{7} + \frac{4}{13} \right) + 2 \cdot \frac{4}{10} \right].$$

Das Resultat ist 1,39; der genaue Integralwerth 2,3026 log. 4 = 1,386.

Drittes Kapitel.

Von den Massen und ihren Combinationen mit Distanzen und Geschwindigkeiten.

§. 1. Von der Masse eines Körpers.*)

83. Wenn zwei materielle Puncte so beschaffen sind, daß sie (beziehungsweise) unter der Einwirkung zweier gleichen Kräfte von constanter Intensität und Richtung eine und dieselbe Bewegung annehmen, so sagt man, sie haben dieselbe Masse. Erfordern sie aber für eine und dieselbe Bewegung zwei verschiedene Kräfte, so sagt man, ihre Massen seien diesen Kräften proportional. Man wird später sehen, daß zwei materielle Puncte, um nach und nach beliebige aber immer für beide Puncte identische Bewegungen anzunehmen, je zwei Kräfte erfordern welche in constantem Verhältniß bleiben so lange sich's von den nämlichen beiden Puncten handelt. Hiernach kann man den Grundbegriff der Masse, wie ihn die Mechanik aufstellt, in folgendem Ausdrucke geben:

Die Massen verschiedener materieller Puncte sind Größen, die den Kräften proportional sind welche diese materiellen Puncte nöthig haben um in eine und dieselbe Bewegung zu gerathen.

84. Die Masse irgend eines Körpers ist die Summe der Massen aller materiellen Puncte aus denen der Körper zusammengesetzt ist.

85. Aus dem Vorhergegangenen ersieht man, daß die Worte Trägheit und Masse nicht Dasselbe ausdrücken. Die Trägheit macht, daß eine Kraft nothwendig ist um die Bewegung eines Körpers hervorzurufen oder zu modificiren; die größere oder geringere Masse eines Körpers macht, daß eine größere oder geringere Kraft nothwendig ist um dem Körper eine gewisse Bewegung mitzutheilen oder seine Bewegung in gewisser Weise zu modificiren. Die Trägheit ist eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller Körper; die Masse jedes Körpers ist eine diesem Körper eigenthümliche Größe.

---

*) Die in diesem § enthaltenen vorläufigen Notizen finden eine umfassendere Erläuterung im II. Abschnitt.

86. Damit man die Massen der Körper als Größen in die Rechnung einführen könne, hat man eine Einheit der Masse zu wählen.

Man ist übereingekommen, als Einheit die Masse eines Körpers zu nehmen, welcher, auf einen einzigen Punct concentrirt, die Einwirkung der Krafteinheit während der Zeiteinheit erfordern würde um die Einheit der Geschwindigkeit (d. h. die durch die Längeneinheit dargestellte Geschwindigkeit) zu erlangen.

87. Aus dieser Uebereinkunft folgt, daß der numerische Ausdruck für die Masse eines Körpers mit dem numerischen Ausdruck für die Kraft übereinstimmt, welche in der Zeiteinheit dem Körper die Einheit der Geschwindigkeit verschaffen würde. Mit andern Worten: die Masse eines Körpers enthält ebensoviel Masseneinheiten, als sich Krafteinheiten in derjenigen Kraft finden, welche dem Körper, nachdem sie während der Zeiteinheit gewirkt hat, die Geschwindigkeitseinheit mittheilt.

88. Erfahrung und Versuche zeigen, daß das Gewicht eines Körpers für einen bestimmten Ort eine constante Kraft ist (139). Liegt der Ort der Beobachtung unter der Breite von Paris, und wirkt das Gewicht allein auf den Körper (der sich folglich im leeren Raume befinden müßte), so bewirkt dasselbe, daß der Körper nach Verfluß einer Secunde eine Geschwindigkeit von $9^{m},8088$ erlangt. Daraus kann man, wie wir bald (140) sehen werden, schließen, daß, wenn ein Körper in einer Secunde eine Geschwindigkeit von nur einem Meter annehmen soll, die hiezu erforderliche Kraft gleich dem Gewichte des Körpers dividirt durch 9,8088 ist.

Bringt man diese Thatsache in Verbindung mit dem in der vorigen Nummer aufgestellten willkürlichen Satze, so sieht man:

Die Masse eines Körpers ist numerisch ausgedrückt durch das Gewicht des Körpers dividirt durch die reine Zahl 9,8088,*) vorausgesetzt daß der Körper im leeren Raume und in der Breite von Paris gewogen wird.

Die Zahl 9,8088 wird in unsern Formeln stets durch den Buchstaben g bezeichnet werden.

Hat also ein Körper zu Paris im leeren Raume das Gewicht p, und ist m seine Masse, so hat man

$$m = \frac{p}{g}. \qquad [10]$$

---

*) Es versteht sich, daß diese Zahl eine andere wird wenn statt des Meters eine andere Längeneinheit zu Grunde liegt.

§. 2. Von der Größe der Bewegung und von der lebendigen Potenz eines bewegten materiellen Puncts oder Systems.

89. Definition. Das Product aus der Masse eines materiellen Punctes und seiner Geschwindigkeit für einen gewissen Augenblick heißt die **Quantität der Bewegung** oder die **Bewegungs-Größe** dieses elementaren Körpers in dem betrachteten Augenblick.

Bezeichnet man die Masse durch m und die Geschwindigkeit durch v, so ist also die Größe der Bewegung = mv.

90. Definition. Das Product aus der Masse eines materiellen Punctes und der Projection seiner Geschwindigkeit auf eine Axe heißt die Projection der Bewegungsgröße welche diesem Puncte in dem betrachteten Augenblicke zukommt. Gilt Ox als Axe, so bezeichnen wir diese Projectionsgröße durch mv_x. Sie ist positiv oder negativ je nach dem Vorzeichen von v_x (28).

91. Definition. Ist ein beliebiges System materieller Puncte in Bewegung, so heißt die algebraische Summe der auf irgend eine Axe projicirten Bewegungsgrößen, welche den einzelnen Puncten zukommen, die auf diese Axe projicirte Bewegungsgröße des ganzen Systems. Wird Ox als Axe genommen, so soll diese Summe, welche positiv oder negativ sein kann, bezeichnet sein durch

$$\Sigma mv_x.$$

92. Definitionen. — 1) Die Hälfte des Products aus der Masse eines materiellen Punctes und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit heißt die **lebendige Potenz** oder das lebendige Vermögen (puissance vive) dieses Körpers im betrachteten Augenblicke. Die Bezeichnung dafür ist

$$\tfrac{1}{2}\, mv^2.$$

2) Die lebendige Potenz eines materiellen Systems ist die Summe aus den lebendigen Potenzen seiner Elemente, und wird bezeichnet durch

$$\Sigma \tfrac{1}{2}\, mv^2 \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2}\, \Sigma\, mv^2.$$

Die lebendigen Potenzen sind daher wesentlich positive Größen.

Man wird weiter unten (160 u. 168) sehen, wie man darauf geführt worden ist, die Größe der Bewegung und die lebendige Potenz bei bewegten Körpern zum Gegenstand besonderer Betrachtung zu machen.

§. 3. Vom Schwerpuncte eines Systems materieller Puncte.

93. Das Product mx aus der Masse m eines im Raum beliebig liegenden materiellen Punctes und seiner Distanz x von einer Ebene yOz heißt das Moment dieser Masse in Beziehung auf die angenommene Ebene. Geht letztere durch den Punct, so ist das Moment null. Die Momente zweier materiellen Puncte haben verschiedene Vorzeichen, wenn die Puncte auf verschiedenen Seiten der Ebene liegen.

94. Lehrsatz. Für jedes System von materiellen Puncten — mögen diese in Bewegung oder in Ruhe, unabhängig von einander oder durch wechselseitige Einwirkungen verbunden sein — gibt es in jedem Augenblicke einen geometrischen Punct von solcher Lage, daß das Product aus der Gesammtmasse des Systems und dem Abstande dieses Punctes von irgend einer Ebene gleich ist der algebraischen Summe aus den Momenten der Elementarmassen in Beziehung auf die nämliche Ebene und für den nämlichen Augenblick.

Dieser geometrische Punct heißt der Schwerpunct des materiellen Systems.*) Das Product aus seinem Abstande von einer Ebene und der

---

*) Das Dasein eines Schwerpuncts wurde durch die Betrachtung des Gleichgewichts starrer Körper entdeckt; und die Definition welche man gewöhnlich vom Schwerpuncte gibt setzt die Starrheit des Systems voraus. Der Schwerpunct, sagt man, ist derjenige Punct des Körpers, durch welchen stets die Resultante für die Einwirkungen der Schwere auf die Elemente des Körpers hindurchgeht, wie man auch den Körper im Raume drehen möge. Gegen diese Definition sind mehrere Bedenken zu erheben; erstlich kann sie zu der irrigen Meinung verleiten, als müsse der Schwerpunct ein materieller Punct sein der dem betrachteten Körper selbst angehört, was nicht der Fall ist (wie z. B. eine Hohlkugel oder ein Ring zeigt); und ferner läßt sich jene Definition selbst dann, wenn man die zur Vermeidung obigen Irrthums nöthige Modification anbringt, nicht unmittelbar und ohne weitere Erläuterung auf Körper von veränderlicher Gestalt anwenden, auf eine Flüssigkeit oder auf ein System mehrerer Körper, wo es keine Resultante im eigentlichen Sinne mehr gibt.

Die von uns (nach dem Vorgange der Geometer des achtzehnten Jahrhunderts) angenommene Definition ist allgemeiner, und keiner falschen Auslegung fähig.

Der Lehrsatz (94), auf welchem diese Definition beruht, ist eigentlich ein Satz der Geometrie, der folgendermaßen ausgesprochen werden könnte: Wenn man in einem beliebigen Systeme geometrischer Puncte, welche in einem gewissen Augenblicke bestimmte Lagen einnehmen, jeden Punct mit irgend einer Zahl versieht, so gibt es für jeden Augenblick einen geometrischen Punct von solcher Lage, daß das Product aus seiner Entfernung von einer beliebigen Ebene und der Summe sämmtlicher den Puncten beigeschriebenen Zahlen gleich der

Gesammtmasse des Systems heißt das **Moment der Masse des Systems** in Beziehung auf diese Ebene.

Beweis.

1) Zwei materielle Puncte, deren Massen m', m'' sind, haben die Lagen A', A'' (Fig. 9).

Ihr Schwerpunct kann nirgend anderswo als auf der Geraden $M'M''$ liegen; denn sonst würde das Moment der Gesammtmasse null werden können ohne daß die Summe der Elementar-Momente null wird.

Es sei G'' der Schwerpunct, dessen Lage noch unbekannt ist, und dessen **Dasein** selbst erst zu beweisen ist. Fällt man auf eine beliebige Ebene die Senkrechten $A'B'$, $A''B''$, $G''C$, deren Längen durch x', x'', X'' bezeichnet sein mögen, so soll die Gleichung stattfinden

$$(m' + m'')\,X'' = m'\,x' + m''\,x'',$$

oder

$$m'\,(X'' - x') = m''\,(x'' - X'').$$

Wird die Gerade $N'G''N''$ parallel zu $B'B''$ gezogen, so hat man

$$X'' - x' = A'N', \qquad x'' - X'' = A''N''.$$

Der Punct G'' wird somit die oben ausgesprochene Eigenschaft haben, sobald die Proportion besteht

$$m' : m'' = A''N'' : A'N'$$

oder

$$m' : m'' = A''G'' : A'G'',$$

d. h. der Schwerpunct für zwei materielle Puncte liegt auf ihrer Verbindungslinie $A'A''$ und theilt diese nach dem umgekehrten Verhältniß der beiden Massen m', m''.

Summe der **Producte** ist, **welche man erhält wenn man** die (positive oder negative) **Distanz jedes einzelnen Punctes von jener Ebene mit der ihm zugehörigen Zahl multiplicirt.** — (Sind z. B. die verschiedenen Puncte, um welche sich's handelt, die Mittelpuncte für die Gemeindebezirke einer Provinz, und wird jedem solchen Puncte die Volkszahl der Gemeinde beigeschrieben, so ist jener Punct, von dessen Existenz der Lehrsatz spricht, der Mittelpunct der Bevölkerung dieser Provinz.) — Der Beweis des in solcher Form gegebenen Satzes würde von dem im Texte enthaltenen Beweise nur darin abweichen, daß an die Stelle der partiellen Massen die Zahlen träten, durch welche dargestellt ist, welche Wichtigkeit jedem Puncte von irgend einem Gesichtspuncte aus eingeräumt wird. Sollte ein Leser noch einige Dunkelheit in den oben hingestellten Begriffen über die Massen der Körper finden (welche übrigens der zweite Abschnitt völlig aufklären wird), so könnte derselbe sich vorläufig die Massen durch Zahlen vorgestellt denken mit denen die Elemente eines materiellen Systems begabt sind.

Wenn der Punct G″ auf diese Weise bestimmt ist, gilt die Gleichung

$$(m' + m'') X'' = m'x' + m''x''$$

für jede beliebige Lage der Momenten-Ebene; wobei jedoch stets die Vorzeichen der Ordinaten x', x'', X'' zu beachten sind.

2) Es seien zwei materielle Systeme vorhanden welche die Gesammtmassen M',M'' haben. Wir nehmen an, daß es für jedes dieser Systeme einen Schwerpunct gibt, d. h. einen Punct von der im Lehrsatze ausgesprochenen Eigenthümlichkeit; und diese beiden Schwerpuncte sollen A', A'' heißen. Durch die nämlichen Schlüsse wie vorhin läßt sich nun beweisen, daß für die beiden in Verbindung gedachten Systeme ein gemeinsamer Schwerpunct G'' besteht, und daß dieser die Gerade $A'A''$ in zwei Stücke $A'G''$, $A''G''$ theilt welche sich umgekehrt verhalten wie die Massen M',M''. Denn in der Gleichung

$$(M' + M'') X'' = M'x' + M''x'',$$

welche die Ordinate des Punctes G'' für jede beliebige Lage der Ebene $B'B''$ zu befriedigen hat, sind in den Producten $M'x'$, $M''x''$, der Voraussetzung gemäß, die Momente für sämmtliche Elemente jedes Systems zusammengefaßt.

3) Nehmen drei Massen-Elemente m', m'', m''' die Lagen A', A'' A''' ein, so kann man die beiden ersten zu einem untergeordneten System zusammennehmen. Dann hat, nach der vorstehenden Bemerkung, das ganze System einen Schwerpunct G''', und dieser liegt auf der Geraden $G''A'''$, welche den Schwerpunct G'' des aus m' und m'' bestehenden Systems mit der Lage A''' des dritten Elements verbindet; ferner theilt derselbe diese Gerade in zwei Stücke welche mit den Massen $m' + m''$ und m''' in umgekehrtem Verhältniß stehen.

Diese Betrachtung, welche sich leicht auf jede beliebige Anzahl von Massen-Elementen ausdehnen läßt, beweist das Dasein eines ihnen gemeinsamen Schwerpuncts, wie er oben definirt wurde, und lehrt ihn durch geometrische Construction finden.

95. Sind x', y', z'; x'', y'', z''; .... die rechtwinkeligen Coordinaten beliebig vieler zu einem Systeme verbundener materieller Puncte, denen die Massen m', m'', ... zukommen, und bezeichnet man die Coordinaten für den Schwerpunct des Systems durch X, Y, Z, so kann man das allgemeine Ergebniß der vorigen Nummern in folgender Art schreiben:

$$X\Sigma m = \Sigma mx, \quad Y\Sigma m = \Sigma my, \quad Z\Sigma m = \Sigma mz,$$

indem man unter Σmx die Summe $m'x' + m''x'' + \ldots$, unter Σmy und Σmz die auf ähnliche Art gebildeten Summen, sowie unter Σm die Summe der Massen versteht. Hieraus folgt dann

$$X = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad Y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad Z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}. \qquad [11]$$

Außerdem daß diese Gleichungen [11] die Coordinaten des Schwerpuncts als Functionen der Massen und Coordinaten der Elemente liefern, beweisen sie auch noch daß es für ein Gesammtsystem nur einen einzigen Schwerpunct gibt.

96. Die obigen Gleichungen behalten auch für ein schiefwinkeliges Coordinatensystem ihre Geltung; denn in diesem Falle sind z. B. die Ordinaten x', x'', ... X den senkrechten Abständen der betreffenden Puncte von der Ebene der yz proportional.

97. Ferner lassen sich dieselben Gleichungen auch auf den Schwerpunct eines Systems beziehen, welches aus mehreren Gruppen oder untergeordneten Systemen besteht, wenn jeder der Buchstaben m', m'',... die Gesammtmasse eines solchen Theil-Systems bedeutet und die Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z'';... den Schwerpuncten dieser einzelnen Systeme zugehören.

Die Lage des Schwerpuncts für ein zusammengesetztes System hängt überhaupt blos von den Lagen ab, welche die Schwerpuncte der untergeordneten Systeme einnehmen, und von den gegenseitigen Verhältnissen zwischen den Gesammtmassen dieser Systeme. Sind jene Lagen und diese Verhältnisse gegebene, so läßt sich die Lage des gemeinsamen Schwerpuncts entweder analytisch oder auch geometrisch (Nr. 94) finden.

98. In allen vorhergegangenen Gleichungen kann man für die Massen die ihnen proportionalen (88) Gewichte setzen. Sind somit p', p'', p'''... die Gewichte der Elemente eines beliebigen Systems; x', x'', x'''... die rechtwinkeligen oder schiefwinkeligen Ordinaten derselben in Beziehung auf eine Ebene der yz; P das Gesammtgewicht des Systems; X die Ordinate des Schwerpuncts bezüglich jener Ebene: so hat man, wenn man in der ersten Gleichung der Nr. 95 beide Seiten mit g multiplicirt,

$$XP = p'x' + p''x'' + \dots = \Sigma px. \qquad [12]$$

Man faßt diesen Ausdruck in folgende Worte: Denkt man sich das Gesammtgewicht eines Systems im Schwerpuncte vereinigt, so ist, bezüglich irgend einer Ebene, das Moment dieses Gewichts gleich der Summe aus den Gewichts-Momenten aller Elemente.

99. Wenn man die sämmtlichen Massen eines Systems parallel mit der Axe der z verschiebt, so bleiben die Coordinaten x, y der Elementar-Massen dieselben; mithin werden auch die beiden Coordinaten X, Y des Schwerpuncts sich nicht ändern. Projicirt man also das System parallel mit der einen Coordinatenaxe z auf die Ebene der beiden andern (indem man nur die Lagen der materiellen Puncte, aber nicht ihre Massen verändert

denkt), so ist der Schwerpunct der Projection die Projection des ursprünglichen Schwerpunctes.

Ebenso verhält sich's, wenn sämmtliche Elemente des Systems mittels paralleler Ebenen auf eine Axe projicirt werden.

100. Sind die Massen der Partialsysteme einander gleich, so ist die Distanz des gemeinsamen Schwerpuncts von einer beliebigen Ebene das arithmetische Mittel aus den Distanzen der den einzelnen Systemen zugehörigen Schwerpuncte von der nämlichen Ebene. In diesem Falle nennt man den Schwerpunct des Total-Systems zuweilen den Punct der mittlern Entfernung für die partiellen Schwerpuncte.

101. Bei den Anwendungen der Analysis und der Geometrie auf Physik und Mechanik nimmt man die Existenz vollkommen homogener Körper an, so daß für die ganze räumliche Ausdehnung eines solchen Körpers die Masse M welche einen gewissen Theil seines Volums ausfüllt, dividirt durch den numerischen Ausdruck V dieses Volums, einen durchaus constanten Quotienten $\frac{M}{V}$ gibt. Dieser Quotient ist die Masse für die Einheit des Volums, und heißt in der Mechanik die Dichtigkeit des Körpers. Bezeichnet P das Gewicht jenes Theils, so ist auch der Quotient $\frac{P}{V}$ für die ganze Ausdehnung des Körpers constant; er gibt das Gewicht für die Einheit des Volums an, und heißt das specifische Gewicht des Körpers.

Diese Begriffe, welche eine absolute Stetigkeit der Materie voraussetzen, passen nicht in aller Strenge auf die Naturkörper; denn diese sind Anhäufungen materieller Theilchen oder Atome, die nicht unmittelbar aneinander anliegen, sondern durch Poren oder leere Räume getrennt sind.

Da aber die Atome und ihre Zwischenräume so äußerst klein sind, daß ein für uns kaum noch wahrnehmbares Volum unermeßlich viele derselben umfassen kann, so führt die Annahme der Stetigkeit zu keinem merklichen Fehler bei Untersuchung der Beziehungen welche zwischen dem Volum, der Masse und dem Gewichte mechanisch homogener Körper bestehen, oder bei Bestimmung ihres Schwerpuncts; und jene Annahme gewährt den Vortheil, daß sie die Anwendung mathematischer Methoden erlaubt, in allen Fällen nämlich wo die Gestalten der Körper mit hinreichender Annäherung sich unter die Definitionen der Geometrie bringen lassen.

Betrachtet man einen Körper als mathematisch homogen, so kann man seinen Schwerpunct a priori definiren, indem man den Massen-Elementen ihre Volume substituirt, die unter der erwähnten Voraussetzung ihnen proportional sind. Man nennt deßhalb diesen Punct öfters den Schwerpunct für das Volum des Körpers; und es ist klar, daß die einzig nothwendigen

Angaben zur Bestimmung des Schwerpuncts die Ausdehnung und Gestalt des vom Körper eingenommenen Raumes sind, die Dichtigkeit aber außer Spiel bleibt. (GL. Nr. 306 u. f.)

102. Haben die mit den Massen m′, m″, ... begabten Puncte eine Bewegung, so seien für einen bestimmten Augenblick x′, x″ .... ihre Abscissen auf einer beliebigen Axe, und X die Abscisse für den Schwerpunct ihres Systems im nämlichen Augenblick. Man hat dann

$$(m' + m'' + m''' + \ldots)\, X = m'x' + m''x'' + m'''x''' + \ldots.$$

Während eines kleinen Zeitraums dt nehmen die verschiedenen Abscissen um dx′, dx″, dx‴, ... dX zu, und man wird haben

$$(m + m'' + m''' + \ldots)\frac{dX}{dt} = m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt} + m'''\frac{dx'''}{dt} + \ldots,$$

d. h. (90) die auf eine Axe projicirte Größe der Bewegung für die Gesammtmasse eines Systems, wenn man diese Masse im Schwerpunct vereinigt denkt, ist gleich der Summe aus den Bewegungsgrößen sämmtlicher Elementar-Massen, projicirt auf die nämliche Axe. Ist U die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, so läßt sich dieß kurz so schreiben:

$$U_x \Sigma m = \Sigma m v_x. \qquad [13]$$

103. Drei ähnliche Gleichungen wie diese letzte geben die Geschwindigkeit U des Schwerpuncts und ihre Richtung als Functionen der Geschwindigkeiten der elementaren Massen, und der Winkel welche deren Richtungen mit drei rechtwinkeligen Axen bilden.

§. 4. Von der lebendigen Potenz eines starren Körpers der um eine feste Axe sich dreht, und von seinem Trägheits-Moment in Beziehung auf diese Axe.

104. Absolut starre Körper, d. h. solche deren Elemente völlig unveränderliche Distanzen unter einander behaupten, gibt es in der Natur nirgends. Solange indeß die auf eine Formveränderung hinwirkenden Kräfte nicht zu groß sind, können gewisse Körper — wie die Erfahrung darthut — näherungsweise als vollkommen starr angesehen werden.

Ein solcher Körper sei in Rotationsbewegung um eine feste Axe, und es bezeichne

ω die Winkelgeschwindigkeit desselben in einem gewissen Augenblick,
m die Masse von einem seiner Elemente,
r die Distanz dieses Elements von der Rotationsaxe:

dann ist die Geschwindigkeit des Elements (48) . . . . . ωr

und seine lebendige Potenz (92) . . . . $\frac{1}{2}m\omega^2r^2$.

Die lebendige Potenz des ganzen Körpers ist daher . . . $\Sigma\frac{1}{2}m\omega^2r^2$;

und da die Größe $\frac{1}{2}\omega^2$ als gemeinschaftlicher Factor bei allen Gliedern dieser Summe, die sich auf einen bestimmten Augenblick bezieht, erscheinen muß, so reducirt sich die Summe auf

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\,\Sigma mr^2. \qquad [14]$$

105. Die Größe Σmr^2, d. i. die Summe der Producte die man erhält, wenn man jedes Massen-Element eines starren Systems mit dem Quadrat seiner Distanz von einer Axe multiplicirt, heißt das Trägheits-Moment des Systems in Beziehung auf diese Axe. Wie man leicht sieht, ist dasselbe derjenigen Masse numerisch gleich, welche, um die Einheit der Distanzen von der Axe abstehend, für sich allein die nämliche lebendige Potenz besitzen würde wie der betrachtete starre Körper. Mit Benützung dieser Definition läßt sich die vorhergegangene Formel auf folgende Weise lesen: Die lebendige Potenz eines starren, um eine feste Axe rotirenden Körpers für einen beliebigen Augenblick ist das halbe Product aus dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit welche der Körper in diesem Augenblick hat, und seinem Trägheitsmoment in Beziehung auf die Rotationsaxe.

106. Die Bestimmung des Trägheitsmoments eines Körpers für irgend eine Axe wird durch einen allgemeinen Lehrsatz erleichtert, mittels dessen man, sobald das Trägheitsmoment eines starren Systems für eine durch seinen Schwerpunct gehende Axe bekannt ist, das Trägheitsmoment des Systems für eine beliebige Parallele zu jener Axe findet.

Es sei (Fig. 10) Oz die durch den Schwerpunct gehende Axe; AB die andere. Man ziehe Ox so, daß sie beide Gerade senkrecht schneidet, und errichte Oy senkrecht auf der Ebene zOx. Für irgend einen Punct M des Systems seien x und y die mit Ox und Oy parallelen Coordinaten; also $OP = x$, $PC = y$. Die Distanz MQ oder r_1 des Puncts von der Axe Oz ist $= OC = \sqrt{x^2 + y^2}$; und seine Distanz r (= AC) von der Axe AB führt, wenn man $OA = k$ setzt, auf die Gleichung

$$r^2 = y^2 + (k - x)^2 = y^2 + x^2 + k^2 - 2kx = r_1^2 + k^2 - 2kx,$$

oder, nach Multiplication mit der Masse m des Punctes M:

$$mr^2 = mr_1^2 + mk^2 - 2kmx.$$

Diese Gleichung paßt für jeden Punct des Systems, wenn man der Abscisse x immer das gehörige Vorzeichen gibt, d. h. sie negativ nimmt sobald der Punct hinter der Ebene yOz liegt.

Denkt man sich solcher Gleichungen, wie die letzte, soviele angeschrieben als Puncte im Systeme vorhanden sind, und dann alle diese Gleichungen addirt, so folgt

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mr_1^2 + k^2 \Sigma m; \qquad [15]$$

denn da der Schwerpunct G auf der Axe Oz liegt, so ist die algebraische Summe Σmx der auf die Ebene yOz bezogenen Momente null (95). Man hat also folgenden Satz:

Das Trägheitsmoment eines starren Systems für eine beliebige Axe erhält man, wenn man zu dem Trägheitsmoment für eine Axe, welche parallel zur vorigen durch den Schwerpunct gelegt ist, das Product aus der Gesammtmasse und der quadrirten Entfernung beider Axen addirt.

107. Nach dem Beispiele englischer Schriftsteller gebrauchen wir den Namen Gyrations-Radius oder Schwungradius für die Länge R, welche die Gleichung

$$\Sigma mr^2 = R^2 . \Sigma m$$

befriedigt, d. h. den Abstand von der Axe angibt in welchem man die Gesammtmasse des rotirenden Körpers concentrirt denken müßte um das nämliche Trägheitsmoment zu erhalten, wobei dann auch die lebendige Potenz sich nicht ändern würde solange die Winkelgeschwindigkeit dieselbe bleibt. Bezeichnet R_1 den Schwungradius des Körpers in Beziehung auf die durch den Schwerpunct gehende Axe Oz, so kommt die letzte Gleichung der Nr. 106 nach Wegschaffung des gemeinsamen Factors Σm auf die Form

$$R^2 = R_1^2 + k^2, \qquad [16]$$

d. h. das Quadrat des Schwungradius eines Körpers für eine beliebige Axe ist die Summe aus dem Quadrat des Schwungradius für eine parallele durch den Schwerpunct gehende Axe, und dem Quadrate des Abstands beider Axen.

108. Handelt sich's von einem homogenen Körper, so kann man in der Gleichung $\Sigma mr^2 = R^2 \Sigma m$ den elementaren Massen ihre Volume u, welche ihnen proportional sind, substituiren, und erhält hiedurch

$$\Sigma ur^2 = R^2 \Sigma u.$$

Der Schwungradius läßt sich alsa unabhängig von jedem Begriffe der Mechanik definiren.

Die Bestimmung der Trägheitsmomente oder der Schwungradien homogener Körper von geometrischer Gestalt gibt Gelegenheit zu nützlicher Anwendung der Integralrechnung. (GL. Nr. 343 u. f.)

109. Wir haben gesehen (104), daß die lebendige Potenz eines starren, um eine feste Axe rotirenden Körpers durch

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr^2$$

ausgedrückt ist. Dient die vorige Linie AB als feste Axe, und setzen wir für Σmr^2 den in Nr. 106 erhaltenen Ausdruck, so wird die lebendige Potenz dargestellt durch

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}\omega^2 k^2 \Sigma m.$$

Nun ist ωk die absolute Geschwindigkeit des Schwerpuncts G während der Rotation des starren Systems um AB; bezeichnen wir also diese Geschwindigkeit durch v_1, so ist der Ausdruck für die lebendige Potenz des Systems

$$\tfrac{1}{2}v_1^{\,2}\Sigma m + \tfrac{1}{2}\omega^2 \Sigma mr_1^{\,2},$$

was sich wie folgt aussprechen läßt:

Die lebendige Potenz eines starren, um eine feste Axe rotirenden Körpers kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine die lebendige Potenz ist welche der Körper haben würde, wenn seine ganze Masse im Schwerpuncte condensirt wäre; der andere aber die lebendige Potenz welche das System besitzen würde, wenn die Drehung um eine durch den Schwerpunct gehende und zur ersten parallele Axe vor sich gienge.

110. Dieses Resultat ist nur ein besonderer Fall eines allgemeineren Satzes, für welchen wir den von Coriolis (Traité du calcul de l'effet des machines, p. 77 et suiv.) gelieferten Beweis hier wiedergeben wollen.

Wir betrachten ein beliebiges System von materiellen Puncten, die unter sich verbunden oder von einander unabhängig sein können, und suchen ihre gesammte lebendige Potenz auszudrücken als Function der Geschwindigkeit des Schwerpuncts und der relativen Geschwindigkeiten bezüglich beweglicher Axen, welche durch den Schwerpunct gehen und mit diesem translatorisch fortgeführt werden. Es seien

X, Y, Z die veränderlichen Coordinaten des Schwerpuncts in Bezug auf feste, rechtwinkelige Axen;

x, y, z die Coordinaten für irgend einen Punct des Systems in Bezug auf dieselben Axen;

x', y', z' die Coordinaten des nämlichen Puncts in Bezug auf Axen welche durch den beweglichen Schwerpunct parallel zu den erstern gelegt sind.

Für jeden Augenblick hat man

$$x = X + x'$$
$$y = Y + y'$$
$$z = Z + z'.$$

Denkt man sich sämmtliche Coordinaten als Functionen der Zeit t, und differentiirt nach t, so folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dX}{dt} + \frac{dx'}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} + \frac{dy'}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{dZ}{dt} + \frac{dz'}{dt}.$$

Bezeichnet V die Geschwindigkeit des Schwerpuncts, v die absolute Geschwindigkeit eines zum System gehörigen Punctes, v' dessen relative Geschwindigkeit hinsichtlich der beweglichen Axen, — alle diese Geschwindigkeiten für einen und denselben Augenblick genommen, — so können die vorigen drei Gleichungen so geschrieben werden:

$$v_x = V_x + v'_{x'}$$
$$v_y = V_y + v'_{y'}$$
$$v_z = V_z + v'_{z'}.$$

Ist m die Masse des beliebig angenommenen Puncts, so ist die gesammte lebendige Potenz des Systems in jenem Augenblicke, auf welchen sich die obigen Geschwindigkeiten beziehen,

$$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2,$$

oder (30) $$\Sigma \tfrac{1}{2} m \,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2);$$

und wenn man die vorstehenden Werthe von v_x, v_y, v_z substituirt, erhält dieser Ausdruck die Form

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m \,[(V_x + v'_{x'})^2 + (V_y + v'_{y'})^2 + (V_z + v'_{z'})^2],$$

oder entwickelt:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m \,(V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \Sigma \tfrac{1}{2} m \,(v'^2_{x'} + v'^2_{y'} + v'^2_{z'})$$
$$+ \Sigma m V_x v'_{x'} + \Sigma m V_y v'_{y'} + \Sigma m V_z v'_{z'}.$$

In den drei letzten Summen sind beziehungsweise die Factoren V_x, V_y, V_z den sämmtlichen betreffenden Gliedern gemeinschaftlich, weßhalb man schreiben kann

$$V_x \Sigma m v'_{x'} + V_y \Sigma m v'_{y'} + V_z \Sigma m v'_{z'}.$$

Nun sind die Größen $\Sigma m v'_{x'}$, $\Sigma m v'_{y'}$, $\Sigma m v'_{z'}$, wenn man das System nur in Beziehung auf die beweglichen Axen betrachtet, die Summen der auf diese Axe projicirten Bewegungsgrößen für sämmtliche Puncte des Systems; da aber die erwähnten Coordinatenaxen durch den Schwerpunct

gehen, so sind die drei Summen null (102). Mithin reducirt sich die oben berechnete lebendige Potenz auf

$$\Sigma \tfrac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) + \Sigma \tfrac{1}{2} m ({v'}_{x'}^2 + {v'}_{y'}^2 + {v'}_{z'}^2)$$

oder noch einfacher (30) auf

$$\tfrac{1}{2} (\Sigma m) V^2 + \Sigma m v'^2.$$

Dieß läßt sich aussprechen wie folgt:

Die lebendige Potenz für ein bewegtes, ganz beliebiges materielles System kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, deren einer die lebendige Potenz ist welche das System haben würde, wenn all' seine Masse im Schwerpuncte condensirt wäre; den andern Theil aber würde man als lebendige Potenz des ganzen Systems finden, wenn man keine weitere Bewegung vor Augen hätte als blos die relative Bewegung des Systems hinsichtlich coordinirter Axen, welche durch den Schwerpunct gehen und von diesem, parallel zu ihren anfänglichen Lagen, mitgeführt werden.

Viertes Kapitel.

Berechnung der Arbeit von Kräften welche verschiedene Puncte eines materiellen Systems angreifen.

---

§. 1. Von der Summe der Arbeiten zweier gleichen und entgegengesetzten Kräfte an zwei verschiedenen, in Bewegung begriffenen Puncten.

111. Bei Berechnung der Wirkung solcher Kräfte, welche verschiedene Puncte eines und desselben Körpers angreifen, hat man (wie wir später sehen werden) häufig die algebraische Summe aus den Arbeiten dieser Kräfte zu betrachten. Die Bestimmung dieser Summe ist eine geometrische Aufgabe, deren einfachste und nützlichste Fälle wir in diesem und dem folgenden Paragraphen untersuchen wollen.

112. Lehnsatz aus der Geometrie des Unendlichen. — Haben (Fig. 11) die Puncte A, A′ einen endlichen Abstand von einander, und man nimmt den Punct B unendlich nahe an A, den Punct B′ unendlich nahe an A′, so ist der Unterschied zwischen der Distanz BB′ und ihrer Orthogonalprojection PQ auf die Gerade AA′ ein unendlich Kleines höherer Ordnung, d. h. er ist unendlich klein gegen die unendlich kleinen Abstände AB, A′B′.

Beweis. Es sei $AB = s$, $A'B' = s'$, $BC = z$, $CP = y$, $B'C' = z'$, $C'Q = y'$, $BB' = l$, $PQ = p$.

Da die Winkel C, P, C′, Q rechte sind, so hat man

$$l = \sqrt{p^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

woraus folgt

$$l < p + \frac{(y' - y)^2}{2p} + \frac{(z' - z)^2}{2p},$$

denn das Quadrat dieser letztern Größe ist größer als $p^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$ oder l^2; daher

$$l - p < \frac{(y' - y)^2}{2p} + \frac{(z' - z)^2}{2p}.$$

Die Coordinaten z, y sind beide kleiner als s; ebenso sind z' und y' kleiner als s'; deßhalb ist, welche Zeichen auch diese Größen haben mögen, immer

$$(y' - y)^2 < (s + s')^2$$

und

$$(z' - z)^2 < (s + s')^2,$$

also

$$l - p < \frac{(s + s')^2}{p}.$$

Folglich ist das Verhältniß der Differenz $l - p$ zu der unendlich kleinen Summe $s + s'$ kleiner als der unendlich kleine Bruch $\frac{s + s'}{p}$; was zu beweisen war.

113. Dieser Satz führt auf einen einfachen Ausdruck für die Summe der Arbeit zweier gleicher und direct entgegengesetzter Kräfte welche an zwei verschiedenen in Bewegung begriffenen Puncten angebracht sind.

Einer der beweglichen Puncte durchläuft die Curve ABD (Fig. 12), der andere die Curve A'B'D'. Eine Kraft F, anfänglich von constanter Intensität angenommen, wirkt auf den ersten beweglichen Punct in den successiven Richtungen AF, BF,... DF, welche durch A', B',... D' gehen, während eine gleiche Kraft F' am zweiten Puncte thätig ist längs der durch A, B, D gehenden Geraden A'F', B'F',... D'F'. Jede der Kräfte F, F' wird eine Arbeit erzeugen; es fragt sich nun, welchen Werth die algebraische Summe dieser beiden Arbeiten (jede mit ihren gehörigen Vorzeichen genommen) habe.

BC, B'C' oder ds, ds' seien zwei unendlich kleine Bögen welche gleichzeitig beschrieben werden; α, α' ihre Winkel mit den Kräften F, F'. Diese Winkel sind nicht constant, erleiden aber nur unendlich kleine Aenderungen während die Wege BC, B'C' durchlaufen werden. Bis auf einen Fehler, den man so weit man nur will verringern kann wenn man jene Bögen immer kleiner nimmt, sind daher die entsprechenden Arbeits-Elemente

$$F \,.\, ds \,.\, \cos\alpha, \qquad F' \,.\, ds' \,.\, \cos\alpha',$$

und ihre Summe ist

$$F\,(ds \,.\, \cos\alpha + ds' \,.\, \cos\alpha').$$

Fällt man aus den Puncten C, C′ auf BB′ die Senkrechten CP, C′P′, so ist BP = ds . cos α, B′P′ = ds′ . cos α', und der vorstehende Ausdruck für das Arbeits-Element verwandelt sich in

$$F\,(BP + B'P') \qquad \text{oder} \qquad F\,(PP' - BB').$$

Nun kann man nach dem vorausgeschickten Lehrsatze, bis auf einen neuen Fehler, der aber um so mehr vernachlässigt werden darf, für PP′ die Länge CC′ substituiren, so daß die Summe der Arbeits-Elemente = F (CC′ — BB′) wird, d. i. gleich dem Producte aus der einen Kraft und dem unendlich kleinen Zuwachs der Entfernung zwischen den beiden beweglichen Puncten, welches sich durch F . dl ausdrücken läßt.

Daher beträgt zwischen den Anfangs-Lagen A, A′, deren Abstand AA′ = l_0 ist, und den End-Lagen deren Abstand l ist, die Summe beider Arbeiten genau F (l — l_0), nämlich das Integral von Fdl.

114. Wenn die beiden in der vorigen Nummer betrachteten Kräfte nach ihrer Intensität veränderlich sind, aber immer einander gleich und direct entgegengesetzt bleiben, so geht die Summe ihrer Arbeiten (dem Vorigen zufolge) über in

$$\int_{l_0}^{l} F.dl. \qquad [17]$$

115. In Fig. 12 stoßen die Kräfte sich ab, und die beweglichen Puncte entfernen sich mehr und mehr von einander; die Gesammtarbeit ist dann positiv. Würden die Puncte, während die Kräfte abstoßend bleiben, einander sich nähern, entweder vermöge erworbener Geschwindigkeiten oder durch die Wirkung anderer Kräfte, so wäre die Arbeit der beiden entgegengesetzten Kräfte negativ. Wenn die Kräfte sich anziehend verhielten, so würde die Summe ihrer Arbeiten positiv oder negativ sein, jenachdem die Angriffspuncte sich gegeneinander oder auseinander bewegten. Die obige Gleichung ist für alle Fälle anwendbar, indem man der Kraft F das Zeichen — gibt wenn die Kräfte anziehend wirken, wobei außerdem dl positiv oder negativ wird jenachdem der Abstand l wächst oder abnimmt.

116. Aus dem Bisherigen ergibt sich folgender

Lehrsatz. Wenn zwei constante oder veränderliche, aber stets gleiche und entgegengesetzte Kräfte an zwei bewegten Puncten wirken, so hängt die Summe ihrer Arbeiten blos von der relativen Bewegung dieser Puncte unter sich ab, und ist folglich gleich der Arbeit welche die eine der Kräfte allein hervorbringen würde, wenn die Bewegung ihres Angriffspuncts darauf beschränkt wäre, diesen Punct dem

andern, als fest angesehenen Puncte näher oder ferner zu rücken.

117. Zusatz. In dem besondern Falle, wo die beiden Angriffspuncte zweier gleichen und entgegengesetzten Kräfte während ihrer Bewegung in unveränderlichem Abstande von einander bleiben, sind die Arbeiten dieser Kräfte fortwährend gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen, weil der Factor dl stets null ist.

§. 2. Von der Arbeit mehrerer Kräfte welche verschiedene Puncte eines starren Systems angreifen.

Erster Fall: Das starre System hat eine Translationsbewegung.

118. Wir ziehen eine sehr kurze Zeit in Betracht, während welcher alle Puncte des Systems gleiche und parallele Wege beschreiben (44). Es sei dx die gemeinschaftliche Länge dieser kleinen Wege, und Ox eine Axe welche ihnen im nämlichen Sinne parallel ist. Die Orthogonalprojection jeder Kraft F auf die Richtung des von ihrem Angriffspuncte durchlaufenen Weges ist gleich der Projection dieser Kraft auf die Axe Ox. Die Summe der Arbeit aller Kräfte ist daher Σ dx . F cos (F,x) oder dx Σ F cos (F,x), indem dx ein gemeinschaftlicher Factor für alle Glieder der Summe ist. Daher:

Lehrsatz. Die Summe der elementaren Arbeiten der Kräfte, welche ein starres System während einer Translationsbewegung desselben angreifen, ist gleich dem elementaren Wege eines seiner Puncte, multiplicirt mit der Summe aus den Projectionen aller Kräfte auf eine zur Translationsgeschwindigkeit parallele Axe.

Dieß schreiben wir kurz so:

$$d\,\Sigma\mathfrak{T}F = dx\,\Sigma F_x.$$

Zweiter Fall: Das starre System dreht sich um eine Axe.

119. Der Punct M (Fig. 13) eines starren, um eine feste Axe rotirenden Systems werde von einer Kraft F angegriffen. Wir legen durch ihn senkrecht zur festen Axe eine Ebene, welche die Ebene unserer Figur sein soll; die Projection der Axe auf diese Ebene sei A. Wir beschränken unsere Betrachtung auf eine sehr kurze Zeit, während welcher sämmtliche Puncte des Systems Bögen von derselben Gradzahl beschreiben (47). Durch $d\sigma$ sei die Winkelverschiebung des Systems während dieser Zeit bezeichnet, d. h. der

Weg eines Puncts, welcher mit dem Systeme unveränderlich verbunden ist und von der Axe um die Einheit der Distanzen absteht.

Bedeutet ferner ds den Bogen welchen während derselben Zeit der Punct M beschreibt, und r die Distanz dieses Bogens von der Axe, so hat man

$$ds = rd\sigma.$$

Um die Arbeit der Kraft F während der Zeit zu erhalten welche sein Angriffspunct zur Zurücklegung des Weges ds braucht, muß man diesen Bogen mit der Projection der Kraft auf die Tangente MT multipliciren welche den elementaren Bogen im Sinne der Bewegung verlängert. Um diese Projection zu erhalten, sei zunächst P die (in der Figur durch MB dargestellte) Projection der Kraft F auf die Ebene des beschriebenen Bogens, welche die Ebene der Figur ist; und α sei der Winkel den die Projection P mit der Tangente macht. Dann ist, wie man leicht sieht, die Projection von P auf die Tangente MT zugleich die Projection der Kraft F auf die Tangente, so daß letztere Projection durch MC dargestellt und durch $P \cos \alpha$ ausgedrückt ist. Denkt man sich nämlich die Kraft F durch eine Gerade MN dargestellt, so ist B der Fußpunct des aus dem Puncte N auf die Ebene der Figur gefällten Lothes; und da BC senkrecht auf MT steht, so ist der Punct C, nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie, zugleich der Fußpunct des aus N auf MT gefällten Loths. Sonach ist die elementare Arbeit der Kraft F

$$ds \,.\, P \cos \alpha \qquad \text{oder} \qquad d\sigma \,.\, Pr \cos \alpha.$$

Nun lehrt der Anblick der Figur, daß die Größe $r \cos \alpha$ gleich der kürzesten Distanz AK zwischen der Kraft F und der Axe A ist, wobei diese Distanz mit dem Zeichen + oder — genommen wird, jenachdem der Winkel α spitz oder stumpf ist. Setzt man daher AK = p, so hat man für die elementare Arbeit der Kraft F den Ausdruck

$$\pm d\sigma Pp.$$

Sind statt einer Kraft ihrer mehrere an dem nämlichen starren Systeme in Thätigkeit, so hat man für die elementaren Arbeiten, welche die einzelnen Kräfte in einer und derselben Zeit erzeugen, Ausdrücke wie der obige, in denen allen der gemeinschaftliche Factor $d\sigma$ vorkommt.

120. Definition. Ist p die kürzeste Distanz einer Kraft F von einer Axe A, und P die Projection der Kraft auf eine zur Axe senkrechte Ebene, so heißt das Product $\pm Pp$, welches dasselbe Vorzeichen hat wie die Arbeit der Kraft bei einer Rotationsbewegung ihres Angriffspuncts um die Axe A, das **Moment** der Kraft in Beziehung auf diese Axe.

121. Aus dieser Definition und der vorhergegangenen Formel, ausgedehnt auf eine beliebige Anzahl von Kräften, ergibt sich folgender

Lehrsatz. Während der Rotationsbewegung eines starren Systems um eine feste Axe ist die Summe aus den elementaren Arbeiten der am Systeme thätigen Kräfte gleich der unendlich kleinen Winkelverschiebung des Systems, multiplicirt durch die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf die Rotationsaxe.

Wir drücken dieß durch nachstehende Bezeichnung aus:

$$d\Sigma\mathfrak{T}F = d\sigma\Sigma M_A F,$$

wobei $M_A F$ das Moment einer Kraft F in Beziehung auf die Axe A bedeutet.

122. Anmerkung. Das Moment Pp einer Kraft F von beliebiger Intensität ist null, wenn die Kraft F mit der Axe A in einerlei Ebene liegt; denn man hat $p = 0$ wenn die Kraft die Axe schneidet, und $P = 0$ wenn die Kraft parallel zur Axe ist.

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls wahr.

§. 3. Von der Arbeit der Schwere bei der Bewegung eines beliebigen materiellen Systems.

123. Das Gewicht eines Körpers ist, wie schon (88) erwähnt wurde, für einen bestimmten Ort eine constante Kraft. Ihre Richtung ist vertical, und ihre Intensität wechselt mit der Breite und mit der Entfernung vom Mittelpunct der Erde. In den gewöhnlichen Fällen aber, und insbesondere bei den Untersuchungen der industriellen Mechanik, kann das Gewicht eines bewegten materiellen Punctes immer als eine Kraft betrachtet werden welche der Intensität nach constant und der Richtung nach parallel mit einer gegebenen Geraden ist; folglich findet auf diese Kraft die in Nr. 78 ausgesprochene und aus der allgemeinen Definition der Arbeit gezogene Bemerkung Anwendung. Man erhält dadurch folgende eben so einfache als nützliche Regel:

Wenn man unter den verschiedenen Ursachen der Bewegung eines materiellen Punctes nur sein Gewicht gesondert betrachtet, so ist die Arbeit dieser Kraft zwischen irgend zwei Lagen M_0, M (Fig. 14) ihres Angriffspuncts gleich dem Producte aus der constanten Intensität der Kraft und der Höhe MN, um welche sich die zweite Lage M des Punctes unterhalb der durch die erste Lage M_0 gehenden Horizontalebene befindet, wie auch übrigens die Curve M_0M gestaltet

sein möge. **Liegt der Punct M höher als M_0, so ist die fragliche Arbeit negativ.**

Bedeutet also p das Gewicht des betrachteten materiellen Puncts, h die Höhe um welche der Punct abwärts gekommen ist (und welche also negativ genommen werden muß falls der Punct sich gehoben hat), so ist ph die Arbeit der Schwere während dieser Lagenveränderung.

Oder bezeichnet man in Beziehung auf eine horizontale Ebene die Ordinate für die Anfangs-Lage des Puncts durch z_0, die für die End-Lage durch z, wobei der positive Sinn dieser Ordinaten von oben nach unten gehen soll, so ist die Arbeit des Gewichts p dargestellt durch $p(z - z_0)$.

124. Wir wollen nun aber den Ausdruck für die Arbeit der Schwere in irgend einem materiellen Systeme suchen, gleichviel was für Bewegungsursachen sonst noch vorhanden sind. Ueber die Natur dieses Systems setzen wir gar nichts voraus; es kann starr, oder biegsam, oder flüssig sein, oder selbst aus Theilen bestehen die ohne alle Verbindung unter sich sind.

Sind $p', p'', p''', \ldots$ die Gewichte der einzelnen Puncte des Systems; $z'_0, z''_0, z'''_0, \ldots$ die Ordinaten ihrer Anfangs-Lagen; $z', z'', z''', \ldots$ die ihrer End-Lagen (in Beziehung auf eine Horizontalebene, und vertical von oben nach unten genommen), so ist die gesammte Arbeit der Schwere während des Uebergangs aus der ersten Lage des Systems in die letzte

$$p'(z' - z'_0) + p''(z'' - z''_0) + p'''(z''' - z'''_0) + \ldots$$

oder

$$p'z' + p''z'' + p'''z''' + \ldots - (p'z'_0 + p''z''_0 + p'''z'''_0 + \ldots),$$

was wir kurz durch die Gleichung ausdrücken:

$$\Sigma\mathfrak{T}p = \Sigma pz - \Sigma pz_0.$$

Bezeichnet man durch Z_0 und Z die Ordinaten für die erste und letzte Lage des Schwerpuncts, durch P das Gesammtgewicht des Systems, so erhält man (98) für obige Gleichung die Form

$$\Sigma\mathfrak{T}p = PZ - PZ_0$$

oder

$$\Sigma\mathfrak{T}p = P(Z - Z_0). \quad [18]$$

Also ist in einem beliebigen bewegten System die Arbeit der Schwere gleich dem Gesammtgewicht des Systems multiplicirt mit der Höhe um welche der Schwerpunct gefallen ist.

Dabei ist wohl zu beachten daß diese Höhe, und mithin auch die Arbeit, **negativ** ist falls der Schwerpunct sich **gehoben** hat.

125. (Besonderer Fall, wo die Berechnung der Arbeit der Schwere sich vereinfacht.) — Man denke sich ein System abcd (Fig. 15) in seiner Anfangs-Lage in zwei Gruppen efdc, abef getheilt, deren Gewichte P', P'' sind und deren Schwerpuncte die Ordinaten Z'_0, Z''_0 haben. Dann ist (98)

$$P = P' + P'', \qquad \text{und} \qquad PZ_0 = P'Z'_0 + P''Z''_0.$$

Läßt sich das System in seiner End-Lage EFIH in zwei neue Gruppen EFDC, CDIH theilen welche wieder die Gewichte P', P'' haben, und hat überdieß die eine dieser Gruppen ihren Schwerpunct an derselben Stelle oder doch in derselben Höhe wie die Gruppe vom nämlichen Gewicht bei der ersten Lage des Systems, so daß die Ordinaten für die Schwerpuncte der beiden neuen Gruppen Z'_0, Z'' sind, so hat man

$$PZ = P'Z'_0 + P''Z'';$$

daher reducirt sich die Arbeit $P(Z - Z_0)$ auf $P''(Z'' - Z''_0)$, d. h. auf das Product aus dem gemeinschaftlichen Gewicht P'' der beiden Gruppen abef, CDIH, deren Schwerpuncte (von denen der eine seine Anfangs-Lage, der andere seine End-Lage hat) nicht in einerlei Höhe liegen, und dem Höhenunterschiede dieser Schwerpuncte.

Die von der Schwere erzeugte Arbeit ist also in diesem Falle dieselbe, wie wenn die Elemente der Gruppe abef aus dieser ihrer Anfangs-Lage in die End-Lage CDIH gekommen wären.

Man begegnet diesem Falle in mehreren Untersuchungen der Hydraulik.

Zweiter Abschnitt.

Dynamik des materiellen Puncts.

Erstes Kapitel.

Geradlinige Bewegung eines materiellen Puncts.

---

126. Die Bewegung eines Körpers, ganz allgemein und nach allen Beziehungen hin betrachtet, ist eine sehr zusammengesetzte Erscheinung. Es rückt nicht blos die Gesammtmasse des Körpers von einem Orte zum andern, sondern der Körper selbst kann dabei gleichzeitig eine Drehung um sich selbst haben, und seine Bestandtheile können ihre gegenseitigen Abstände mehr oder weniger ändern.

Zur Vereinfachung unserer Untersuchungen beschäftigen wir uns zuerst mit der Wirkung der Kräfte auf materielle Puncte, welche sich von gewöhnlichen Körpern nur darin unterscheiden, daß sie sehr klein und von unveränderlicher Form sind.

§. 1. Gleichförmige geradlinige Bewegung eines materiellen Puncts.

127. Nach dem Princip der Trägheit (58) bleibt ein ruhender materieller Punct fortwährend in Ruhe, wenn er nicht durch irgend eine Kraft angeregt wird. Dieser Satz läßt sich nicht umkehren; d. h. wenn ein materieller Punct in Ruhe ist, darf man nicht schließen, er sei durch keine Kraft angegriffen. Wo aber ein solcher Punct in Ruhe verbleibt, obgleich eine Kraft auf ihn wirkt, da darf man versichert sein daß zu gleicher Zeit noch eine oder mehrere andere Kräfte ihn anzuregen suchen. Man sagt dann, alle diese am erwähnten Puncte thätigen Kräfte seien im Gleichgewicht.

Die Bedingungen des Gleichgewichts werden wir später kennen lernen.

128. Aus dem Princip der Trägheit folgt andererseits, daß ein materieller Punct, der zuerst durch irgendwelche Kräfte bewegt worden war, dann aber — indem jede ihn treibende Kraft zu wirken aufhört — sich selbst überlassen wird, eine gleichförmige geradlinige Bewegung annehmen muß. Diese Bewegung erfolgt nach der Tangente am Endpunct des früher durchlaufenen Bogens, und mit der nämlichen Geschwindigkeit die der materielle Punct in jenem Endpuncte hatte, d. h. in dem Augenblicke wo die Thätigkeit der bewegenden Kräfte aufgehört hat.

Daher kommt es, daß man für die Geschwindigkeit eines in veränderlicher Bewegung begriffenen Punctes zuweilen die Definition gibt, sie sei die Geschwindigkeit derjenigen gleichförmigen Bewegung, welche der Punct einhalten würde wenn in dem betrachteten Augenblicke jede weitere Einwirkung einer Kraft auf den Punct abgeschnitten wäre. Dieser Satz spricht eine unzweifelhafte Wahrheit aus; aber er ist keine passende Definition für die Geschwindigkeit, deren Begriff unabhängig ist von der Trägheit der Materie und vom Begriff der Kraft.

129. Ein materieller Punct kann gleichwohl auch dann in gleichförmiger geradliniger Bewegung verharren, wenn er von Kräften angegriffen bleibt. Wir werden später sehen, daß in diesem Falle die Kräfte den Bedingungen des Gleichgewichts Genüge leisten.

§. 2. Veränderliche geradlinige Bewegung in Folge einer constanten Kraft. Begründung ihrer Theorie durch das allgemeine Princip der relativen Bewegungen.

130. Um eine Vorstellung von einer constanten Kraft zu erhalten welche allein auf einen Körper wirkt, kann man sich für einige Zeit die Schwere hinwegdenken, und annehmen, der Körper werde inzwischen ununterbrochen durch eine Feder gedrückt oder gezogen, deren Spannung stets dieselbe bleibt, ungeachtet der Schnelligkeit mit welcher sich der Körper zuletzt bewegen würde.

Wirkt eine constante Kraft auf einen materiellen Punct ein, der anfangs in Ruhe, aber frei ist, d. h. von keiner andern Kraft angegriffen wird, so geräth der Körper in Bewegung, nach einer Richtung welche mit der Richtung der Kraft zusammenfällt. Hat dieser Körper zu Ende einer gewissen Zeit t eine gewisse Geschwindigkeit v, so sagt man, die constante Kraft F, welche den betrachteten Körper angreift, habe demselben in der Zeit t die Geschwindigkeit v ertheilt.

131. Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit der Bewegung eines materiellen Puncts, der im Anfangs-Augenblick eine gewisse Geschwindigkeit aus irgendwelchen vorangegangenen Ursachen schon besitzt, und von diesem Augenblick an die Einwirkung einer constanten Kraft erleidet, deren Richtung mit der Anfangsgeschwindigkeit in einerlei Gerade fällt, und entweder den nämlichen Sinn hat wie diese, oder den entgegengesetzten.

Die Theorie dieser Bewegung erfordert die Auflösung zweier Aufgaben:

1) Die Art der Bewegung zu bestimmen welche aus der Constanz der Kraft folgt, abgesehen von ihrer Intensität;

2) den Einfluß der Intensität zu bestimmen, indem man die Bewegungen zweier gleichen materiellen Puncte unter der Einwirkung zweier verschiedenen constanten Kräfte vergleicht.

132. Die Lösung der ersten Frage beruht auf folgendem, der Experimentalphysik entlehnten Princip:

Besitzt irgend ein System materieller Puncte eine geradlinige gleichförmige Translationsbewegung (45), und ein anderer Punct, der in einem gewissen Augenblick aus beliebigen vorausgegangenen Ursachen die Transportgeschwindigkeit des Systems (35) hat, erleidet von diesem Augenblick an die Einwirkung einer oder mehrerer Kräfte, so nimmt er bezüglich des Systems dieselbe relative Bewegung an, welche jene Kräfte ihm ohne das Dasein der gemeinsamen Bewegung mitgetheilt haben würden.

So verhält sich's z. B., wenn wir auf einem mit geradliniger gleichförmiger Bewegung fortgleitenden Schiffe hin und her gehen, oder einen mit uns eingeschifften Körper von der Stelle bewegen. Diese relativen Bewegungen erfolgen nämlich ganz eben so, wie es der Fall sein würde wenn das Schiff still stände.

133. Aus diesem Naturgesetze ergibt sich folgender

Lehrsatz. Wenn ein materieller Punct, der bereits irgend eine Anfangsgeschwindigkeit hat, von einer einzigen constanten Kraft in der Richtung jener Geschwindigkeit angegriffen wird, so ist seine Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, und die von der Anfangsgeschwindigkeit unabhängige Beschleunigung hat den nämlichen Sinn wie die Kraft.

Denkt man sich nämlich um den bewegten Punct in dem Augenblicke, wo er eine gewisse Geschwindigkeit v besitzt, eine weite abstehende Hülle gelegt, deren sämmtliche Puncte ebendiese Geschwindigkeit v haben und gleichförmig

beibehalten, so wird der von der constanten Kraft getriebene Punct während einer bestimmten Zeit innerhalb der Hülle eine relative Geschwindigkeit empfangen, welche von der Transportgeschwindigkeit v unabhängig, aber mit ihr parallel ist. Diese relative Geschwindigkeit ist nun nichts anderes als die während der betrachteten Zeit erfolgte Aenderung der absoluten Geschwindigkeit (39); woraus folgt, daß in beliebigen aber gleichen Zeitabschnitten die positiven oder negativen Aenderungen der Geschwindigkeit gleichgroß und von der Anfangsgeschwindigkeit unabhängig sind.

Man darf nicht übersehen, daß die Geschwindigkeits-Aenderung negativ ist sobald die Kraft im negativen Sinne wirkt; gleichwohl behält auch für diesen Fall die Aenderung, wenn man sie auf die Zeit-Einheit bezieht (10), den Namen Beschleunigung. Es folgt hieraus, daß die nämliche Kraft, welche einem beweglichen Puncte eine positive Beschleunigung ertheilt hat, ihm eine numerisch gleiche negative Beschleunigung gegeben haben würde, wenn sie in entgegengesetztem Sinne gewirkt hätte.*)

Bezeichnet man

durch x_0 die Entfernung um welche der materielle Punct im Anfangs-Augenblicke von einem festen Puncte seines geradlinigen Weges absteht;

durch v_0 seine Geschwindigkeit im nämlichen Augenblick;

durch x und v die analogen Größen zu Ende der Zeit t;

durch j die constante Beschleunigung der Bewegung;

so wird der obige Lehrsatz analytisch durch die eine oder die andere der drei nachstehenden Gleichungen ausgedrückt, von denen die beiden letzten aus der ersten folgen (14 u. 15):

$$\frac{dv}{dt} = j,$$
$$v = v_0 + jt,$$
$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} j t^2.$$

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, wie die Größe j, welche für den nämlichen Körper und die nämliche Kraft constant bleibt, sich ändert für verschiedene Kräfte und verschiedene Körper. Zunächst aber suchen wir die Lösung der zweiten Frage von Nr. 131.

*) Obiger Lehrsatz umfaßt auch den Fall, wo der materielle Punct, nachdem er durch beliebige Kräfte in Bewegung gesetzt worden war, sich selbst überlassen ist. Da hier die treibende Kraft null ist, so bleibt der Punct (nach dem Princip in Nr. 132) in relativer Ruhe gegen die Hülle, und behält deßhalb unwandelbar die nämliche absolute Geschwindigkeit welche die Hülle erlangt hat. Hat man daher nur die erste, in Nr. 127 ausgesprochene Eigenschaft der Trägheit und das Princip in Nr. 132 zugegeben, so erschließt man hieraus als nothwendige Folgerung die zweite, in Nr. 128 erwähnte Eigenschaft der Trägheit.

134. Diese Lösung beruht auf nachstehendem Princip, welches mit dem in Nr. 132 nicht identisch ist; vielmehr ist letzteres nur ein besonderer Fall des folgenden. Der Unterschied besteht darin, daß die gemeinschaftliche Translationsbewegung, welche in Nr. 132 gleichförmig war, jetzt als eine beliebig veränderliche geradlinige Bewegung auftritt.

Allgemeines Princip der relativen Bewegung.

Wenn irgend ein System materieller Puncte eine veränderliche geradlinige Translationsbewegung besitzt, und ein anderer Punct, welcher in einem gewissen Augenblick die Transportgeschwindigkeit des Systems hat, empfängt von diesem Augenblick an außer der zu seiner Theilnahme an der Beschleunigung des Systems nöthigen Kraft noch die Einwirkung einer oder mehrerer anderer Kräfte, so nimmt derselbe in Hinsicht auf das System die nämliche (relative) Bewegung an, welche diese letztern Kräfte ihm mittheilen würden, wenn die auf die gemeinsame Bewegung bezüglichen Geschwindigkeiten und Kräfte nicht vorhanden wären.

Dieses Naturgesetz kann keinen directen und strengen Versuchen unterworfen werden; es findet aber seine Bestätigung in der Uebereinstimmung der aus ihm gezogenen Folgerungen mit den beobachteten Thatsachen, namentlich in der Astronomie. Man wird durch dasselbe zu folgendem Satze geführt.

135. Lehrsatz. Werden zwei gleiche materielle Puncte von ungleichen Kräften in den Richtungen der Anfangsgeschwindigkeiten angegriffen, so verhalten sich die Beschleunigungen wie diese Kräfte.

Unter gleichen materiellen Puncten verstehen wir solche, welche unter Einwirkung gleicher Kräfte einerlei Beschleunigung annehmen würden.

Es sei die eine der Kräfte 2F, das Doppelte der andern F. Denkt man sich zwei gleiche materielle Puncte zuerst in Ruhe, und bringt dann in parallelen Richtungen an jedem die Kraft F an, so würden beide in einer gemeinsamen gleichförmig beschleunigten Bewegung fortgehen (133). Tritt aber zu dem einen Puncte bei seinem Ausgang von der Ruhe noch die zweite Kraft F in der vorigen Richtung hinzu, so erhält er in Beziehung auf den andern eine relative Geschwindigkeit, welche derjenigen absoluten Geschwindigkeit gleich ist, die der letztere durch die einzige Kraft F empfangen hat. Daher ist beim ersten Puncte die Geschwindigkeit, und mithin auch die Beschleunigung, in jedem Augenblicke doppelt so groß als beim zweiten.

Eben so beweis't man den Satz für einen Fall wo die eine Kraft 2, 3, 4, ... n mal so groß ist als die andere.

Stehen endlich die Kräfte im Verhältniß der ganzen Zahlen n, n', so daß sie durch nF_1 und $n'F_1$ ausgedrückt sind, und man bezeichnet durch j_1 die Beschleunigung welche der Wirkung der Kraft F_1 auf einen der betrachteten gleichen Puncte entspricht, so sieht man leicht, daß die durch nF_1 und $n'F_1$ erzeugten Beschleunigungen nj_1 und $n'j_1$ sein müssen und folglich den Kräften proportional sind.

136. Zusatz. Wird ein materieller Punct durch eine veränderliche Kraft in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit getrieben, so verhalten sich für zwei beliebige Augenblicke die Beschleunigungen wie die Intensitäten der Kraft in jenen Augenblicken.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorigen, falls die Kraft, von einem der betrachteten Augenblicke an, eine gewisse wenn auch sehr kurze Zeit hindurch constant bleibt. Er besteht daher auch noch wenn diese Zeit unendlich klein wird, d. h. wenn bei stetiger Veränderung der Kraft die Beschleunigung durch $\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt ist (10).

§. 3. Numerische Bestimmung der Beschleunigung, welche durch eine gegebene Kraft an einem Körper von gegebenem Gewichte hervorgerufen wird.

137. Sind F, F' irgend zwei Kräfte, und j, j' die Beschleunigungen welche sie einem gewissen materiellen Puncte ertheilen würden wenn sie allein wirkten, so hat man nach der vorhergehenden Nummer

$$\frac{F}{F'} = \frac{j}{j'}; \qquad [19]$$

und hieraus folgt, daß zur Bestimmung von j

1) durch einen Versuch die Beschleunigung j' zu ermitteln ist, welche der betrachtete Körper durch eine bekannte Kraft F' erfährt; und daß

2) das Verhältniß von F zu F' bekannt sein muß.

138. Nun wird uns aber jener Versuch durch eine sehr merkwürdige Erscheinung in der Natur geliefert, sobald wir zugeben daß alle Bewegungen, die wir auf der Erde innerhalb eines mäßigen Flächenraums beobachten, dieselben seien wie wenn die Erde unbeweglich wäre und gleichwohl das Gewicht der Körper dasselbe bliebe.*) Jeder Körper nämlich, der im leeren Raume der Wirkung der Schwere

*) Die Richtigkeit dieser Voraussetzung wird später (268) bewiesen werden.

überlassen wird, d. h. der keiner weitern Kraft zugänglich ist als derjenigen welche wir sein Gewicht nennen, nimmt immer die nämliche gleichförmig beschleunigte Bewegung an (14). Unter der Breite von Paris beträgt die Beschleunigung dieser Bewegung $9^m,80896$. Wir bezeichnen sie mit g; und demnach sind die Gleichungen der verticalen Bewegung der Körper im leeren Raume (133)

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} g t^2, \\ v &= v_0 + g t, \\ \frac{dv}{dt} &= g, \end{aligned}\right\} \qquad [20]$$

wobei der positive Sinn der verticalen Distanzen x_0, x und der Geschwindigkeiten v_0, v von oben nach unten geht.

An zwei Orten, deren Breiten oder deren Abstände vom Erdmittelpunct sehr beträchtlich verschieden sind, ist die von der Schwere bewirkte Beschleunigung nicht genau dieselbe; am Aequator ist sie um ungefähr $0^m,03$ kleiner als in Paris. In den Anwendungen kann man immer setzen $g = 9^m,81$ und $\frac{1}{g} = 0,102$.

139. Aus dem erwähnten experimentalen Ergebnisse sind mehrere wichtige Folgerungen zu ziehen; nämlich:

1) Das Gewicht eines Körpers ist eine constante Kraft, weil dasselbe, allein wirkend, eine gleichförmig veränderte Bewegung hervorbringt (136).

2) Zwei materielle Puncte von einerlei Gewicht P sind (135) gleiche materielle Puncte, weil sie unter dem Einflusse gleicher Kräfte die nämliche Beschleunigung g annehmen.

3) In der auf verschiedene Bewegungen des nämlichen Körpers bezüglichen Gleichung $\frac{F}{F'} = \frac{j}{j'}$ [19] kann für F' das Gewicht P des beweglichen Körpers gesetzt werden, und gleichzeitig für j' die Beschleunigung g, welche der Körper der Kraft P verdankt wenn sie allein auf ihn wirkt; so daß man hat

$$\frac{j}{g} = \frac{F}{P}, \qquad \text{oder} \qquad j = \frac{gF}{P},$$

d. h. die constante Beschleunigung j, welche eine Kraft F bei alleiniger Wirkung einem materiellen Puncte ertheilt, verhält sich zu der von der Schwere allein bewirkten Beschleunigung g, wie die Kraft F zum Gewichte P jenes Beweglichen; wobei das Gewicht für denselben Ort der Erde gemeint ist an welchem die Beschleunigung beobachtet wurde.

140. Die Relation $\frac{F}{P} = \frac{j}{g}$ gibt ferner $F = P\frac{j}{g}$. Fragt man also nach der Kraft f, welche einem Körper vom Gewichte P eine Beschleunigung von 1 Meter mittheilen würde, so hat man in der letzten Formel $F = f$, $j = 1$ zu setzen, während g stets die reine Zahl 9,81 bedeutet; man findet $f = \frac{P}{g}$, und dieses Resultat stimmt mit der Angabe in Nr. 88 überein.

141. Die vorhergehenden Gleichungen können in die Form gebracht werden:

$$\frac{F}{j} = \frac{F'}{j'} = \frac{P}{g};$$

d. h.: Dividirt man jede einzelne von beliebig vielen Kräften durch den numerischen Ausdruck der Beschleunigung, welche sie, allein wirkend, einem materiellen Puncte mittheilen würde, so ist der Quotient constant, so lange sich's von einem und dem nämlichen materiellen Punct handelt.

§. 4. Untersuchungen über die verticale Bewegung der Körper im leeren Raume.

142. Ehe wir in der allgemeinen Theorie der geradlinigen Bewegung eines materiellen Puncts weiter gehen, verweilen wir einige Zeit bei dem besondern Falle der verticalen Bewegung von Körpern, welche blos der Einwirkung der Schwere und dem Erfolge einer Anfangsgeschwindigkeit überlassen sind.

Die Gleichungen dieser Bewegung sind die in Nr. 138 enthaltenen [20], nämlich

$$x = x_0 + vt + \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v = v_0 + gt, \qquad \frac{dv}{dt} = g.$$

Sie vereinfachen sich, wenn man die Anfangslage des Beweglichen als Ursprung der x annimmt, also $x_0 = 0$ setzt; man hat dann

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2, \qquad v = v_0 + gt,$$

und durch Elimination von t:

$$v^2 - v_0^2 = 2gx.$$

143. Ist v die Geschwindigkeit, welche ein Körper erlangt hat wenn er aus der Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit herabgefallen ist, so hat man

$$h = \tfrac{1}{2} gt^2; \qquad v = gt;$$

hieraus
$$v = \sqrt{2gh} = 4{,}43 \sqrt{h}$$

und
$$h = \frac{v^2}{2g} = 0{,}051\, v^2.$$

Die Zeit oder die Dauer des Falles ist

$$t = \frac{v}{g} = 0{,}102 \,.\, v \qquad \text{oder} \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}45\sqrt{h}.$$

Bedeutet h_1 die Höhe welche der ohne Anfangsgeschwindigkeit fallende Körper in der ersten Secunde durchläuft, so ist

$$h_1 = \tfrac{1}{2} g = 4^m{,}904.$$

144. Wird der Körper vertical in die Höhe geworfen, so kann man die Richtung von unten nach oben als den positiven Sinn der x annehmen; dann ist aber die Beschleunigung g negativ (133), und die Gleichungen der Nr. 142 gehen über in

$$x = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2, \qquad v = v_0 - gt, \qquad v^2 - v_0^2 = -2gx. \qquad [21]$$

Die Geschwindigkeit v nimmt ab, bleibt aber positiv, d. h. aufsteigend, bis $gt = v_0$ wird.

Die Höhe h, zu welcher sich alsdann der bewegte Körper erhoben hat, ist der Werth von x der sich ergibt, wenn man in der ersten Gleichung $t = \frac{v_0}{g}$ setzt; d. i. $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

Von diesem Augenblick an bewegt sich der Körper abwärts, indem die Geschwindigkeit v negativ wird. Betrachtet man ihn nach Ablauf eines neuen Zeitraums, welcher dem des Aufsteigens gleich ist, und setzt man demgemäß in den Gleichungen [21] $t = \frac{2v_0}{g}$, so findet man $x = 0$ und $v = -v_0$; d. h. der Körper ist an denselben Punct zurückgekommen von welchem er ausging, und hat die Anfangsgeschwindigkeit wiedererlangt, jedoch mit entgegengesetztem Sinne. Da jeder auf dem Wege des Beweglichen liegende Punct als Ursprung der x angenommen werden kann, so sieht man ohne weitere Rechnung, daß ein vertical emporgeworfener Körper die nämliche Zeit zur Zurücklegung einer und der nämlichen Wegstrecke braucht, gleichviel ob diese Strecke aufsteigend oder absteigend durchlaufen wird; und daß in zwei Augenblicken,

in denen er durch einen und denselben Punct des Weges geht, seine Geschwindigkeit dieselbe Intensität hat.

Zu diesen Schlüssen würde man auch gelangt sein, wenn man in den Gleichungen der Nr. 142, bei denen die positiven x im Sinne des Absteigens angenommen sind, die Geschwindigkeit v_0 negativ genommen hätte.

145. Die Höhe h, gleich $\frac{v^2}{2g}$ oder $0{,}051v^2$, heißt die Höhe für die Geschwindigkeit v. Es ist dieß die Höhe zu welcher sich ein Körper erhebt, wenn er mit der (aufsteigenden) Geschwindigkeit v vertical emporgeworfen wird; und zugleich die Höhe welche ein ohne Anfangsgeschwindigkeit fallender Körper zurücklegen muß um die Geschwindigkeit v zu erlangen.

Die Geschwindigkeit v, gleich $\sqrt{2gh}$ oder $4{,}43\sqrt{h}$ heißt die Geschwindigkeit für die Höhe h.

146. Uebungs-Aufgaben. (Unter Vernachlässigung des Widerstands der Luft zu lösen.)

1) Die Tiefe x eines Brunnens zu finden aus der Zeit T, welche verfließt zwischen dem Entlassen eines hinabfallenden Körpers und der Ankunft des beim Auffallen verursachten Schalles. (Die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft $= 337^m = a$.)

Man findet $$x = a\left[T - \frac{a}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gT}{a}}\right)\right].$$

2) Ein Körper, der von einem Puncte O aus fällt, hat den Raum h zwischen zwei bekannten Puncten A, B während der Zeit τ $\left(< \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)$ durchlaufen. Man soll den höchsten Punct O, von dem er ausging, bestimmen, d. h. die Entfernung OA.

3) Zwei in derselben Verticallinie fallende Körper verlassen in verschiedenen Augenblicken beziehungsweise die Puncte O und A mit oder ohne Anfangsgeschwindigkeiten; man sucht den Ort und den Augenblick ihres Zusammentreffens auf der Verticalen OA.

4) Zwei Körper verlassen ohne Anfangsgeschwindigkeiten einen und denselben Punct in zwei verschiedenen Augenblicken, welche einander sehr nahe liegen können. Man verlangt den Augenblick wo sie durch einen gegebenen Zwischenraum getrennt sein werden, und die Wege welche sie alsdann durchlaufen haben.

§. 5. Relation zwischen der Masse eines materiellen Puncts, der auf ihn wirkenden Kraft, und der durch letztere ihm mitgetheilten Beschleunigung.

147. Wir betrachten zwei materielle Puncte A und A_1, welche im Allgemeinen ungleich sein sollen, so daß sie also durch gleiche Kräfte ungleiche Beschleunigungen erhalten. Mit F, F_1 bezeichnen wir zwei Kräfte welche diese Körper beziehungsweise angreifen, und mit j, j_1 die daraus entspringenden Beschleunigungen.

Aus dem Lehrsatze in Nr. 135 und seinem Zusatze in 141 folgt, daß die beiden Quotienten $\frac{F}{j}$, $\frac{F_1}{j_1}$, welche im Allgemeinen verschieden sind weil sie sich auf verschiedene Körper A, A_1 beziehen, für jeden einzelnen Körper constant bleiben, wie auch die als Dividend angenommene Kraft beschaffen sein mag, wenn man nur gleichzeitig als Divisor diejenige Beschleunigung nimmt, welche dieser den betrachteten Körper angreifenden Kraft entspricht.

Gesetzt nun, wir wollten den beiden Körpern A, A_1 eine und dieselbe Beschleunigung J ertheilen, und es seien beziehungsweise φ, φ_1 die hiezu nöthigen Kräfte.

Wir haben dann

$$\frac{\varphi}{J} = \frac{F}{j}, \qquad \frac{\varphi_1}{J} = \frac{F_1}{j_1},$$

und hiernach

$$\varphi : \varphi_1 = \frac{F}{j} : \frac{F_1}{j_1}.$$

Also verhalten sich die oben definirten Quotienten $\frac{F}{j}$, $\frac{F_1}{j_1}$ wie zwei Kräfte φ, φ_1 welche den Körpern A, A_1 eine und dieselbe, übrigens beliebige Beschleunigung mitzutheilen im Stande sind.

148. Man hat gesehen (83), daß die Massen zweier materieller Puncte den Kräften proportional sind welche ihnen die nämliche Bewegung zu ertheilen vermögen. Also verhalten sich die Massen m, m_1 der Körper A, A_1 wie die Kräfte φ und φ_1. Daher kann man in der vorigen Proportion m und m_1 für φ und φ_1 substituiren, und hat dann

$$m : m_1 = \frac{F}{j} : \frac{F_1}{j_1}; \qquad [22]$$

d. h. die Massen zweier Körper verhalten sich wie die Quotienten, welche man erhält wenn man irgend zwei Kräfte F, F_1,

deren beziehliche Einwirkung auf diese Körper ihnen die Beschleunigungen j, j_1 ertheilen würden, durch diese Beschleunigungen dividirt.

149. Diese Proportion ist unabhängig von den für Kraft, Beschleunigung und Masse gewählten Einheiten. Sie vereinfacht sich mittels einer in der Mechanik allgemein angenommenen Uebereinkunft (86):

Man nimmt nämlich zur Masseneinheit die Masse eines Körpers, welcher unter Einwirkung der Krafteinheit die Einheit der Beschleunigung (d. i. eine Beschleunigung $= 1$) annehmen würde.

Setzt man hiernach in der letzten Proportion F_1 und j_1 ihren betreffenden Einheiten gleich, so muß auch m_1 der Masseneinheit gleichgesetzt werden.

Man hat dann

$$m : \text{Masseneinheit} = \frac{F}{j} : \frac{\text{Krafteinheit}}{\text{Beschleunigungseinheit}},$$

oder endlich

$$m = \frac{F}{j}.$$

Diese Gleichung ist nicht homogen; ihr wahrer Sinn ist durch die vorhergegangene Proportion ausgedrückt.

150. Ersetzt man (139) die Werthe F und j beziehungsweise durch P und g, so gibt die letzte Formel

$$m = \frac{P}{g}, \qquad [23]$$

d. h. die Masse eines Körpers ist numerisch gleich seinem Gewichte dividirt durch die aus diesem Gewichte entspringende Beschleunigung. (Vgl. 88.)

151. Da die Beschleunigung g am nämlichen Orte für alle Körper constant ist, so verhalten sich die Massen der Körper wie ihre am nämlichen Orte bestimmten Gewichte.*). Gleiche materielle Puncte (135) haben also (139) einerlei Masse.

*) Würde die Schwere auf ungleiche Körper ungleich einwirken, wie es bei electrischen und magnetischen Kräften der Fall ist, so wäre die aus dem Gewichte eines Körpers entspringende Beschleunigung nicht unabhängig von der Natur dieses Körpers, und um seine Masse zu erhalten, müßte man sein Gewicht durch die besondere Beschleunigung seiner verticalen Bewegung im leeren Raume dividiren. Die Massen wären dann also nicht mehr den Gewichten proportional.

152. Anmerkungen.

1) Man könnte in den Rechnungen der industriellen Mechanik die Massen ganz umgehen, und die Körper blos durch ihre Gewichte bezeichnen; die Einführung der Masse bringt aber, wie man sehen wird, mehr Einfachheit in die Formeln und in die Aussprüche der Lehrsätze. In den Anwendungen substituirt man der Masse m eines beliebigen Körpers sein Gewicht P (für die Breite von Paris) dividirt durch g oder 9,81, wenn der Meter und die Zeitsecunde als Einheiten gelten.

2) Wird nach dem Körper gefragt dessen Masse als Einheit betrachtet ist, so hat man in der Gleichung $P = mg$ blos $m = 1$ zu setzen. Dadurch erhält man $P = g$, d. h. in dem von uns angenommenen Systeme der Kraft-, Raum- und Zeit-Einheiten beträgt das Gewicht jenes Körpers 9,81 Kilogramm.

3) Man sagt zuweilen, g messe die Intensität der Schwere. Diese Redensart ist, wenn nicht fehlerhaft, doch jedenfalls unklar, und es kann damit nichts anderes gemeint sein als daß g dem Gewichte der Masseneinheit numerisch gleich ist.

153. Formt man die Gleichung $m = \frac{F}{j}$ der Nr. 149 um in $j = \frac{F}{m}$, wobei man die Kraft F als unveränderlich betrachtet, und substituirt diesen Ausdruck für die constante Beschleunigung j in den Gleichungen der Nr. 133, so erhält man die Gleichungen der geradlinigen gleichförmig veränderten Bewegung eines Puncts von der Masse m unter der Einwirkung einer constanten Kraft von der Intensität F; nämlich

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \qquad v = v_0 + \frac{F}{m}t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2. \end{array}\right\} \quad [24]$$

Es ist hervorzuheben, daß in diesen Gleichungen F dasselbe Zeichen haben muß wie die Beschleunigung j in den Formeln der Nr. 133, so daß F positiv oder negativ ist jenachdem die Kraft im Sinne der positiven x wirkt oder in entgegengesetztem Sinne.

154. Wenn die Kraft F veränderlich ist, kann man sie als constant für eine unendlich kleine Zeit dt betrachten, während welcher der Zuwachs der Geschwindigkeit dv sein wird; die Beschleunigung im betrachteten Augenblick ist $\frac{dv}{dt}$; man hat daher immer noch

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \qquad \text{oder} \qquad m\,dv = F\,dt.$$

Diese Relation hat man als die Fundamental-Gleichung jeder geradlinigen Bewegung zu betrachten.

§. 6. Relation zwischen dem Antrieb und der Bewegungs-Größe bei geradliniger Bewegung.

155. Aus der Gleichung $v = v_0 + \frac{F}{m} t$ in Nr. 153 ergibt sich

$$mv - mv_0 = Ft. \qquad [25]$$

Wenn sonach ein Punct sich unter der Einwirkung einer einzigen constanten Kraft in gerader Linie fortbewegt, und man berechnet für zwei beliebige Augenblicke das Product aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit, so hat die Größe, um welches sich dieses Product ändert, dasselbe Zeichen wie die Kraft, und denselben numerischen Werth wie das Product aus der Kraft und der zwischen den beiden Augenblicken verlaufenen Zeit, welches wir (71) den Antrieb genannt haben.

Beispiele.

1) Eine Flintenkugel, $\frac{1}{40}$ Kilog. schwer, habe eine Geschwindigkeit von 420 Meter, nachdem von dem Augenblicke an, wo sie den Zustand der Ruhe verließ, bis zu dem Augenblicke wo sie jene Geschwindigkeit erlangt hat, eine Kraft auf sie wirkte, welche innerhalb dieses Zeitraums als constant angenommen wird. Setzt man in der obigen Gleichung [25]

$$v_0 = 0, \qquad v = 420, \qquad m = \frac{1}{40g},$$

und also $$mv = \frac{420 \,.\, 0{,}102}{40} = 1{,}071,$$

so kommt $$Ft = 1{,}071.$$

Je nachdem also die Wirkung der Kraft

$$1'', \qquad \frac{1''}{10}, \qquad \frac{1''}{100}, \qquad \ldots$$

gedauert hat, war die Intensität derselben, in Kilogrammen:

$$1{,}071; \quad 10{,}71; \quad 107{,}1; \quad \ldots$$

2) Wenn der nämliche Körper, in dem Augenblicke wo seine Geschwindigkeit 420^m beträgt, auf einen andern Körper trifft, welcher jene Geschwindigkeit vernichtet indem er ihr eine constante Kraft entgegensetzt, so gibt dieselbe Gleichung den Widerstands-Antrieb, der durch das Hinderniß auf die in Bewegung begriffene Kugel ausgeübt wird. Man macht nämlich

$$v = 0, \qquad v_0 = 420, \qquad mv_0 = 1{,}071$$

und erhält $$Ft = -1{,}071.$$

Dieß Product ist negativ, weil der Sinn der Kraft dem Sinne der durch sie vernichteten Geschwindigkeit v_0 entgegengesetzt ist. Nimmt man beispielsweise an, das Hinderniß habe die Geschwindigkeit der Kugel in der Zeit von $0'',001$ vernichtet, so schließt man daß die Kraft 1071^{kg} gewesen sei.

Es könnte hier Anstoß erregen, daß wir das, was bisher blos für einen materiellen Punct festgestellt war, auf einen Körper von meßbaren Dimensionen angewandt haben. Man wird aber später (285) sehen, daß diese Ausdehnung erlaubt ist. Zunächst war es nur darum zu thun, die Bedeutung der Formel $mv - mv_0 = Ft$ durch Zahlen faßlicher zu machen.

156. Das Product mv aus der Masse eines materiellen Puncts und seiner Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke spielt eine wichtige Rolle in der Mechanik, und wurde oben (89) Größe der Bewegung genannt; ein älterer, allerdings sonderbarer Ausdruck, den wir aber beibehalten wollen, weil er einmal allgemein angenommen ist.

157. Aus der Formel [25] zieht man leicht den Schluß: Die Bewegungs-Größen, welche zwei materielle Puncte in geradliniger Bewegung während der nämlichen Zeit und unter der Einwirkung zweier für jeden Punct constant bleibender Kräfte erworben haben, sind diesen Kräften proportional.

Es seien nämlich m und m' die beiden Massen, $v - v_0$ und $v' - v'_0$ die während der Zeit t durch die constanten Kräfte F und F' erlangten Geschwindigkeiten; dann hat man [25]

$$mv - mv_0 = Ft \qquad \text{und} \qquad m'v' - m'v'_0 = F't,$$

daher

$$\frac{mv - mv_0}{m'v' - m'v'_0} = \frac{F}{F'}.$$

Nimmt man an, die beiden Körper seien zu Anfang der Zeit t von der Ruhe ausgegangen, so reducirt sich die Proportion auf

$$\frac{mv}{m'v'} = \frac{F}{F'},$$

d. h. die Bewegungs-Größen zweier verschiedener materieller Puncte verhalten sich wie zwei constante Kräfte, welche jene Größen in einer und der nämlichen Zeit zu erzeugen im Stande sind.*)

---

*) Zu einer Zeit, wo man noch die Existenz augenblicklicher Kräfte (70) annahm, sagte man, die Bewegungs-Größe eines materiellen Puncts drücke die Kraft dieses Körpers aus oder sei ihr proportional (Laplace, Exposition du système du monde, liv. 3, chap. 3). Diese Sprache ist unvereinbar mit der heutzutage geltenden Definition des Wortes Kraft.

158. Wir wollen nun die obige Relation [25] auf den Fall auszudehnen suchen, wo der materielle Punct den aufeinanderfolgenden Wirkungen verschiedener Kräfte unterworfen ist, deren Richtungen aber immer mit dem positiven oder dem negativen Sinne der Geraden zusammenfallen in welcher sich der Punct bewegt.

Für einen Punct von der Masse m sei

v_0 die Geschwindigkeit in einem beliebigen Augenblicke, der als der anfängliche gilt;

F_1 die positive oder negative Kraft welche seit diesem Augenblicke thätig ist;

τ_1 die Dauer der constanten Wirkung von F_1;

v_1 die Geschwindigkeit zu Ende der Zeit τ_1;

F_2 eine Kraft welche die F_1 ablöst;

τ_2 die Wirkungsdauer der F_2;

v_2 die Geschwindigkeit zu Ende dieser zweiten Periode;

Ferner seien

F_3, τ_3, v_3 die analogen Größen für eine dritte Periode;

F_n, τ_n, v die analogen Größen für die nte und letzte Periode.

Man hat dann nach Nr. 155

für die 1te Periode: $mv_1 - mv_0 = F_1\tau_1$;

" " 2te " : $mv_2 - mv_1 = F_2\tau_2$;

" " 3te " : $mv_3 - mv_2 = F_3\tau_3$;

. .

. .

. .

für die nte und letzte Periode: $mv - mv_{n-1} = F_n\tau_n$.

Durch Addition erhält man

$$mv - mv_0 = F_1\tau_1 + F_2\tau_2 + F_3\tau_3 + \ldots . + F_n\tau_n,$$

oder, in abgekürzter Schreibung:

$$mv - mv_0 = \Sigma F\tau.$$

159. Diese letztere Gleichung besteht immer, wie klein auch die Zeiträume τ sein mögen. Nimmt man daher an, daß die Kraft sich stetig ändere, so hat man (GL. 268)

$$mv - mv_0 = \int Fdt. \qquad [26]$$

Dieses Resultat erhält man unmittelbar, nur nicht auf so elementare Weise, durch Integration der Gleichung $mdv = Fdt$. (154.)

160. Der Definition des Antriebs (71) zufolge lassen sich die drei Fälle, auf welche sich die Gleichungen in Nr. 155, 158 u. 159 beziehen, in einer gemeinsamen Fassung aussprechen. Diesen Ausspruch, auf welchen wir uns künftig öfters beziehen müssen, nennen wir den „Satz von der Be-

ziehung zwischen dem Antrieb und der Bewegungs-Größe", oder einfacher den **Lehrsatz vom Effect des Antriebs** bei geradliniger Bewegung eines materiellen Puncts. Er lautet:

Die Aenderung der Bewegungs-Größe ist nach Werth und Vorzeichen gleich dem Antrieb der Kräfte in der nämlichen Zeit.

161. Betrachtet man die beiden besondern Fälle, wo eine der Geschwindigkeiten v_0, v null ist, so sieht man, daß die einem materiellen Puncte zukommende Größe der Bewegung

1) vom nämlichen Werth und dem nämlichen Sinn ist wie der Gesammtantrieb, den der Punct empfangen hat seit dem Augenblicke wo er aus der Ruhe trat;

2) gleichgroß aber von entgegengesetztem Sinne mit dem Antrieb welcher nöthig ist um den materiellen Punct wieder in Ruhe zu versetzen.

162. Es ist klar, daß der erwähnte Satz ohne Einschränkung auch dann gilt, wenn auf das Bewegliche mehrere Kräfte gleichzeitig wirken, entweder in einerlei oder in entgegengesetztem Sinn, doch stets längs einer und derselben Geraden. In diesem Falle ist die in obige Rechnungen und Formeln eingeführte Kraft F die algebraische Summe der in Thätigkeit kommenden Kräfte, und das Resultat ist immer dasselbe, man möge diese Summe mit dem Element der Zeit multipliciren, oder die Multiplication vor der Addition der Kräfte ausführen.

§. 7. Relation zwischen der Arbeit und der lebendigen Potenz bei geradliniger Bewegung.

163. Die beiden Gleichungen [24] in Nr. 153, nämlich

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t \qquad \text{und} \qquad x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

führen zu einem merkwürdigen Ergebniß, wenn man die Zeit t eliminirt. Zu diesem Zwecke kann man die beiden Seiten der ersten auf's Quadrat erheben, und die zweite mit $2\frac{F}{m}$ multipliciren, so daß man hat

$$v^2 = v_0^2 + 2\frac{F}{m}\,v_0 t + \frac{F^2}{m^2}t^2$$

$$2\frac{F}{m}(x - x_0) = 2\frac{F}{m}v_0 t + \frac{F^2}{m^2}t^2;$$

hieraus erhält man

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F(x - x_0). \qquad [27]$$

Bewegt sich demnach ein materieller Punct in gerader Linie unter der Einwirkung einer einzigen constanten Kraft, und man berechnet für zwei beliebige Augenblicke die Hälfte des Products aus seiner Masse und dem Quadrat seiner Geschwindigkeit, so hat die Aenderung dieser Größe denselben Werth und dasselbe Zeichen wie das Product aus der ganzen Kraft und dem Raume um welchen der bewegliche Punct im Sinne dieser Kraft vorgerückt ist; dieß Product ist aber, nach der Definition in Nr. 74 und den Bemerkungen in Nr. 76 u. 78, die Arbeit der Kraft.

Die Beispiele in Nr. 155 können uns hier noch einmal dienen.

1) $v_0 = 0, \quad v = 420, \quad m = \frac{1}{40g}; \quad \frac{1}{2}mv^2 = 224{,}8.$

Gibt man also zu, die Kraft sei vom Beginn der Bewegung bis zu dem Augenblicke wo die Geschwindigkeit 420^m beträgt constant geblieben, und bezeichnet durch x den während dieser Zeit durchlaufenen Raum, so hat man

$$Fx = 224^{kg.m},8.$$

Jenachdem also x eine Ausdehnung von

$$1^m, \quad 2^m, \quad 3^m, \quad \text{zc.}$$

hat, war die Intensität der Kraft F, in Kilogr.:

$$224{,}8; \quad 112{,}4; \quad 74{,}9 \quad \text{zc.}$$

2) $v_0 = 420, \quad v = 0, \quad \frac{1}{2}mv^2 = 224{,}8;$

$$Fx = -224{,}8.$$

Hier ist die Arbeit negativ, weil der Sinn der Kraft dem der Anfangsgeschwindigkeit und folglich auch dem des Weges x entgegengesetzt ist. Nimmt man z. B. an, das Hinderniß habe der bewegten Kugel noch gestattet eine Strecke von $0^m,02$ zurückzulegen, so müßte die Widerstandskraft auf 11240 Kil. angeschlagen werden.

164. Die Größe $\frac{1}{2}mv^2$, das halbe Product aus der Masse eines materiellen Puncts und dem Quadrat der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke, kommt in den Haupt-Lehrsätzen vor von denen die Berechnung des Effects der Maschinen ausgeht. Sie heißt in diesem Buche (92) die lebendige Potenz des materiellen Puncts in dem betrachteten Augenblick.

165. Ehe wir diesen Namen zu rechtfertigen suchen, wollen wir die oben erhaltene Relation [27] für den Fall erweitern wo die Gesammtkraft F (vgl. 167) nicht mehr constant ist.

Behält man die Bezeichnungen der Nr. 158 bei, und versteht man ferner unter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots \sigma_n$ die während der Zeiten $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tau_n$

durchlaufenen Wege, wobei man jene Zeiträume so klein nehmen kann daß in keinem derselben die Geschwindigkeit das Vorzeichen ändert, so hat man nach Nr. 163

für die 1te Periode: $\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_1\sigma_1$;
" " 2te " : $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F_2\sigma_2$;
" " 3te " : $\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = F_3\sigma_3$;
. .
. .
. .
für die nte u. letzte Periode: $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2 = F_n\sigma_n$,

und durch Addition:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + \ldots + F_n\sigma_n,$$

was man in Abkürzung so schreibt:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Sigma F\sigma$$

oder auch, nach der Bezeichnung von Nr. 73:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{T}F;$$

d. h. die Aenderung der lebendigen Potenz ist, wie in Nr. 163, gleich der Arbeit der Gesammtkraft, obwohl diese jetzt als eine solche angenommen ist, die sich schrittweise verändert.

166. Die vorige Gleichung besteht immer, wie klein auch die Wege σ seien. Aendert sich daher die Kraft stetig, und nimmt man die durchlaufene Gerade als Axe, auf welche die veränderlichen Distanzen x des Beweglichen von einem beliebig gewählten Ursprung aufgetragen werden, so hat man (unter Beachtung daß die Kraft F immer ein Vorzeichen hat welches dem Sinne ihrer Wirkung entspricht):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int F dx, \qquad [28]$$

oder immer noch

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \mathfrak{T}F.$$

Dieß ergibt sich auf unmittelbare, aber nicht mehr so elementare Weise aus der Gleichung (Nr. 154) $mdv = Fdt$, wenn man sie (um dt zu eliminiren) mit der Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$ durch Multiplication verbindet, und dann die erhaltene neue Gleichung $mvdv = Fdx$ integrirt.

167. Wirken auf das Bewegliche mehrere Kräfte gleichzeitig in einerlei oder in entgegengesetztem Sinne, so ist die in obigen Rechnungen stehende

Kraft F die algebraische Summe jener Kräfte, und die Arbeit von F für jedes Element des Weges ist gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten der einzelnen Kräfte. Man kann daher schreiben:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F, \qquad [29]$$

indem man jetzt durch F die einzelnen Kräfte bezeichnet.

168. Nach der allgemeinen Definition der Arbeit einer Kraft (74) lassen sich die verschiedenen vorhin betrachteten Fälle zusammen in einem Satze aussprechen, den wir den „Satz von der Relation zwischen Arbeit und lebendiger Potenz“ nennen wollen, oder kürzer den **Lehrsatz vom Effect der Arbeit** bei geradliniger Bewegung eines materiellen Puncts. Nämlich:

Die Aenderung der lebendigen Potenz ist nach Werth und Vorzeichen gleich der Arbeit der Kräfte in derselben Zeit.

169. Betrachtet man die beiden besondern Fälle wo eine der Geschwindigkeiten v_0, v null ist, so sieht man, daß die einem materiellen Puncte zukommende lebendige Potenz 1) gleich ist der ganzen Arbeit welche er in Anspruch genommen hat seit seinem Ausgange aus der Ruhe; und 2) numerisch gleich der negativen Arbeit welche den Punct wieder zur Ruhe bringen würde.

Diese letztere Eigenschaft hat uns Veranlassung gegeben, der Größe $\frac{1}{2}mv^2$ den Namen lebendige Potenz oder lebendiges Vermögen beizulegen, welcher soviel sagen will als die einem bewegten materiellen Puncte inwohnende Fähigkeit, vermöge seiner Masse und Geschwindigkeit eine gewisse ihm entgegentretende Widerstandsarbeit zu bestehen bis er zur Ruhe kommt.

170. In den meisten Lehrbüchern der Mechanik wird die Größe mv^2 lebendige Kraft genannt, und dieser Ausdruck entsprang aus dem Gebrauche des Wortes Kraft für die Arbeitsfähigkeit der Motoren. Coriolis hat — unter der Bemerkung, daß gerade in den wichtigsten Lehrsätzen der Mechanik die Größe $\frac{1}{2}mv^2$ vorkomme und „daß es sehr unbequem sei, nur für das Doppelte einer Größe einen Namen zu haben, welche uns alle Augenblicke aufstößt“ — in seinem Werke über Berechnung des Effects der Maschinen*) vorgeschlagen, die Benennung lebendige Kraft eines materiellen Puncts auf das Product $p\frac{v^2}{2g}$ aus seinem Gewichte p und der seiner Geschwindigkeit v entsprechenden Fallhöhe $\frac{v^2}{2g}$ überzutragen, welches

*) Traité du Calcul de l'effet des machines.

Product gleichbedeutend mit $\frac{1}{2}mv^2$ ist (145 u. 150). Diese Neuerung scheint nicht den Beifall der Gelehrten erhalten zu haben, da man es für sehr mißlich erachtete, die Bedeutung eines Ausdrucks zu wechseln welcher in zahlreichen, mit Recht geschätzten Werken einheimisch geworden ist. Uebrigens sieht auch Coriolis jene Benennung an sich für ungeeignet an, und will sie nur so ausgelegt wissen, daß man das Wort Kraft im Sinne von verfügbarer Arbeit (disponibilité de travail) nimmt, in der Art wie die Practiker von der Kraft eines Pferdes, einer Dampfmaschine, eines Wasserlaufs 2c. sprechen.

Ueberzeugt, daß es zu Anfang der mechanischen Studien von Wichtigkeit ist, mit dem Worte Kraft ausschließlich den Begriff einer Anstrengung, eines in Kilogrammen ausdrückbaren Zuges oder Druckes zu verbinden — woraus folgt, daß ein in Bewegung begriffener und sich selbst überlassener Körper (abgesehen von seinem Gewichte) nichts darbietet was man seine Kraft*) nennen könnte, — haben wir in unserm Lehrbuche für die Größe $\frac{1}{2}mv^2$ oder $p\frac{v^2}{2g}$ den Ausdruck lebendige Potenz gewählt, den der Leser späterhin,

*) Im vorigen Jahrhundert ist viel darüber gestritten worden, wie man die Kräfte bewegter Körper zu messen habe. In dem einfachsten Falle, wo ein fester Körper eine blose Translationsbewegung besitzt, reducirte man die Frage darauf: zu wissen „ob die Kraft eines Körpers, welcher eine gewisse Geschwindigkeit hat, sich verdoppelt oder vervierfacht, wenn seine Geschwindigkeit sich verdoppelt (D'Alembert, Traité de Dynamique; Discours préliminaire p. XVII). Offenbar wurde hiebei das Wort Kraft nicht in dem von uns angenommenen Sinne (61) gebraucht. Indem man die Existenz augenblicklicher Kräfte (70) voraussetzte, sagte man von einem bewegten und sich selbst überlassenen Körper, seine Kraft bleibe die nämliche, oder diese Kraft erhalte sich ohne Aufhören (Laplace, Exposition du système du monde, liv. 3, chap. 2), wie wenn sie in jedem Augenblicke die wirkliche Ursache der Bewegung wäre. Nach den neueren Vorstellungen ist die Kraft nicht die fortbestehende Ursache jeder vorhandenen Bewegung, wohl aber die Ursache für die Modification jeder veränderlichen Bewegung. In Wahrheit kann ein Körper, so lange er sich selbst überlassen heißen soll, eine Kraft weder ausüben noch aufnehmen; und wenn man nach der Kraft fragt durch welche seine Bewegung erzeugt wurde oder vernichtet werden würde, so ist dieß eine unbestimmte Frage. Dagegen lehrt uns die Bewegungsgröße mv des betrachteten Körpers den Antrieb $\int Fdt$ der verlangten Kraft kennen, welcher sich verdoppelt wenn die Geschwindigkeit die doppelte wird; und die lebendige Potenz $\frac{1}{2}mv^2$ zeigt uns die Arbeit $\int Fds$ dieser Kraft an, wobei wir sehen daß bei verdoppelter Geschwindigkeit die Arbeit auf das Vierfache steigt. Mithin haben diejenigen Gelehrten, welche (wie Newton und Euler) das, was sie die Kraft eines bewegten Körpers nannten, durch das Product aus seiner Masse und seiner Geschwindigkeit maßen, unter Kraft die zusammengesetzte Größe verstanden die wir Antrieb nennen; und diejenigen, welche (mit Leibnitz und Bernoulli) das Product aus der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit zum Maße nahmen, gebrauchten den Namen Kraft für die zusammengesetzte Größe welche bei uns Arbeit heißt.

wenn er Lust hat, mit halber lebendiger Kraft vertauschen mag, um sich mit dem allgemeineren Sprachgebrauche in Uebereinstimmung zu setzen.

Für uns knüpft sich an die Worte lebendige Potenz die Vorstellung von der Arbeit, welche ein materieller Punct über sich ergehen läßt ehe er zur Ruhe gebracht wird; und das Beiwort lebendig (vive) dient, wie Coriolis sich ausdrückt, „zur Unterscheidung der Arbeit, welche aus einer „erworbenen Geschwindigkeit (vitesse) wiederzugewinnen ist, von der„jenigen welche aus zusammengedrückten Federn oder irgend einem andern „Motor wiedergewonnen werden kann."

§. 8. Gebrauch der vorangegangenen Formeln für die auf geradlinige Bewegung bezüglichen Aufgaben.

171. Ist die Kraft constant, oder — was auf dasselbe hinauskommt — die Bewegung eine gleichförmig veränderte, so gehören für die hier vorkommenden Fragen die Gleichungen (153 u. 163):

$$v = v_0 + \frac{F}{m} t,$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2,$$

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = F (x - x_0),$$

von denen die dritte (die Gleichung des Arbeits-Effects der constanten Kraft F) aus den beiden ersten durch Elimination von t folgt. Jede dieser drei Gleichungen enthält blos zwei der drei Veränderlichen x, v, t, und liefert folglich die eine derselben als Function von einer der beiden andern.

Wir nehmen nun aber die Kraft als veränderlich an, und betrachten die drei einfachsten Fälle welche hier möglich sind; jene nämlich wo die Kraft eine Function von einer der drei Veränderlichen t, x, v ist.

172. Ist die Kraft als Function der Zeit gegeben, nämlich $F = \mathfrak{F}\{t\}$, so gibt die Fundamental-Gleichung (154) $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ nach der Integration

$$v - v_0 = \frac{1}{m}\int_{t=0}^{t} \mathfrak{F}\{t\}\, dt.$$

Angenommen, das Integral könne unter allgemeiner Form erhalten werden, und es sei

$$v - v_0 = \frac{1}{m} \mathfrak{F}_1 \{t\}.$$

Setzt man dann für v seinen Werth $\frac{dx}{dt}$, so findet man durch abermalige Integration

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m}\int_{t=0}^{t} \mathfrak{f}_1 \{t\} \, dt;$$

und wenn auch dieses zweite Integral unter allgemeiner Form gefunden werden kann, so hat man zwei Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen v, x, t.

Lassen sich aber die Integrale von $\mathfrak{f}\{t\}\,dt$ und $\mathfrak{f}_1\{t\}\,dt$ nicht unter allgemeiner Form darstellen, so erhält man sie näherungsweise für successive Werthe von t durch die Simpson'sche Formel (GL., 302).

Wäre umgekehrt eine der Veränderlichen x oder v unmittelbar als Function der Zeit gegeben, so würde man hieraus den Ausdruck für die unbekannte veränderliche Kraft F durch die Formeln

$$v = \frac{dx}{dt}, \qquad F = m\frac{dv}{dt}$$

finden.

173. Ist die Kraft eine gegebene Function der Distanz x des Beweglichen von einem festen Puncte, etwa $F = \mathfrak{f}\{x\}$, so erhält man die Gleichung des Effects der Arbeit aus der Fundamental-Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{f}\{x\}}{m}$, indem man dt mittels der Relation $v\,dt = dx$ eliminirt und dann integrirt; und zwar

$$\tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} \mathfrak{f}\{x\}\, dx = \mathfrak{f}_1\{x\},$$

wenn nämlich die Integration unter allgemeiner Form möglich ist.

Man findet daraus

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m}\mathfrak{f}_1\{x\}},$$

und nach Substitution dieses Werthes in der Gleichung $dt = \frac{dx}{v}$ reducirt sich die Bestimmung von t als Function von x auf eine Quadratur.

Wäre umgekehrt die Geschwindigkeit unmittelbar als Function der Distanz x gegeben, so würde man daraus auf den Ausdruck der veränderlichen Kraft schließen. Es sei $v = \mathfrak{f}\{x\}$. Nach Elimination der Zeit zwischen den Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad \text{und} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

hat man

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m} \quad \text{oder} \quad F = m\,\mathfrak{f}\{x\}\,\mathfrak{f}'\{x\}.$$

Wäre die Zeit t als Function von x gegeben, so sucht man zuerst die Geschwindigkeit und dann die Kraft. Es sei

$$t = \varphi\{x\}, \qquad \text{also} \qquad dt = \varphi'\{x\}\,dx;$$

man erhält hieraus

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\varphi'\{x\}}.$$

Da somit v als Function von x ausgedrückt ist, kommt man auf den vorigen Fall zurück.

174. Es sei die Kraft als Function der Geschwindigkeit gegeben; nämlich $F = \mathfrak{f}\{v\}$.

Die Fundamental-Gleichung $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$ gibt $dt = \frac{mdv}{\mathfrak{f}\{v\}}$, und die Integration

$$t = m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\mathfrak{f}\{v\}},$$

wodurch man entweder t als Function von v, oder die zu verschiedenen Werthen von v gehörigen angenäherten Werthe von t bestimmen kann.

Um eben so x als Function von v zu erhalten, eliminirt man die Zeit t aus den beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{f}\{v\}}{m}, \qquad \frac{dx}{dt} = v;$$

man findet

$$dx = \frac{mvdv}{\mathfrak{f}\{v\}},$$

und nach Integration

$$x - x_0 = m\int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{\mathfrak{f}\{v\}}.$$

Man kann hiernach für die drei Veränderlichen v, t, x beliebig viele gleichzeitige Werthe angeben.

Ist umgekehrt die Distanz x unmittelbar als Function der Geschwindigkeit v gegeben, so kann man hieraus den Ausdruck für die veränderliche Kraft suchen. Es sei $x = \mathfrak{f}\{v\}$, also $dx = \mathfrak{f}'\{v\}\,dv$. Nach Elimination von dx aus dieser Gleichung und aus $dx = vdt$ hat man $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{\mathfrak{f}'\{v\}}$, und folglich $F = \frac{mv}{\mathfrak{f}'\{v\}}$.

Was die Zeit betrifft, so findet man sie als Function von v durch Integration der vorletzten Gleichung; nämlich

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathfrak{f}'\{v\}\,dv}{v}.$$

Wäre aber die Zeit t als Function von v gegeben gewesen, so hätte man auch leicht die Kraft gefunden. Aus $t = \varphi\{v\}$, oder $dt = \varphi'\{v\}\,dv$, schließt man $F = \frac{m}{\varphi'\{v\}}$. Die Distanz x aber ergibt sich, wenn man dt aus der vorletzten Gleichung und $dt = \frac{dx}{v}$ eliminirt, und die erhaltene Gleichung $dx = v\varphi'\{v\}\,dv$ integrirt; man findet

$$x - x_0 = \int_{v_0}^{v} v\varphi'\{v\}\,dv.$$

175. Bei manchen Aufgaben ist die Kraft als Function mehrerer Veränderlichen x, v, t gegeben; z. B. $F = f\{x, v\}$. Die Fundamental-Gleichung der Bewegung hat dann die Form

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f\{x, v\},$$

oder, wenn man für v seinen Werth $\frac{dx}{dt}$ setzt,

$$d \,.\, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} f\left\{x, \frac{dx}{dt}\right\} dt.$$

Dieß ist eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung, welche in gewissen Fällen integrabel ist, d. h. eine Relation zwischen x und t liefern kann. Die Methoden einer solchen Integration werden in den speciellen Lehrbüchern der Integralrechnung gelehrt. Uebrigens stößt man auf solche Aufgaben in der industriellen Mechanik nur selten.

§. 9. Anwendungen.

1) Vibrations-Bewegung eines verticalen elastischen Stabes welcher einen schweren Körper trägt. *)

176. Erste Untersuchung. — Ein prismatischer Stab ist in verticaler Lage mit seinem obern Ende befestigt; am andern Ende bringt man einen Körper M vom Gewicht Q an, welcher anfangs so unterstützt ist daß er keinerlei Wirkung auf den Stab ausübt, dann aber mit einemmale der Schwere überlassen wird. Von diesem Augenblick an verlängert sich der Stab um eine veränderliche Größe x, und übt gleichzeitig auf den Körper

*) Das Wesentliche der Nummern 176—182 ist aus Poncelet's industrieller Mechanik entnommen (Introduction à la Mécanique industrielle, deuxième édition, p. 385—400).

eine veränderliche Kraftäußerung F. Von dieser Kraft, welche man die Spannung des Stabes nennen kann, wird angenommen, sie sei proportional

1) dem Verhältnisse der Verlängerung x zur ursprünglichen oder natürlichen Länge L,

2) dem Querschnitte A des Stabes, nach Quadratmetern ausgedrückt.

Man hat sonach

$$F = \frac{EAx}{L}, \qquad [30]$$

wobei die Zahl E, welche der Elasticitäts-Coefficient oder Elasticitäts-Modul heißt, sich auf Kilogramme bezieht und von dem Stoffe des Stabes abhängt. Ist dieser Stoff z. B. Schmiedeisen, so ist nahezu $E = 2 . 10^{10}$; daher würde ein Eisendrath von einem Quadratmillimeter Querschnitt und einem Meter ursprünglicher Länge sich um $^1/_2$ Millimeter verlängern, wenn seine Spannung 10 Kilogramm beträgt, d. h. wenn er auf jedes seiner Anknüpfungsenden eine Kraft von 10 Kilogr. übt.

Der Coefficient $\frac{EA}{L}$ von x in der Gleichung [30] ist das Maß für die Straffheit (roideur de ressort) des Stabes in Rücksicht auf seine Federung nach der Längen-Dimension.

Das durch obige Gleichung [30] ausgesprochene Gesetz gilt blos bis zu einem gewissen Ausdehnungszustande, den man die Elasticitäts-Grenze nennt, und welcher für Eisen, je nach seiner Qualität, einer Spannung von 12 bis 18 Kilogr. auf den Quadratmillimeter des Querschnitts entspricht.

Jenes Gesetz beruht ferner auf der Voraussetzung, daß der Stab nach seiner ganzen Erstreckung sich gleichmäßig verlängert, was bei dieser Art der Bewegung nur dann streng stattfindet wenn die Verlängerung sich langsam herstellt. Doch kann auch bei rascher Bewegung der obige Ausdruck für F noch als hinreichend genau angenommen werden, wenn die Masse des Stabs im Verhältniß zur Masse des Körpers M gering ist.

Nach Annahme obiger Voraussetzungen verlangt man nun zu wissen, welche Bewegung der Körper M annimmt, wenn man ihn wie einen materiellen Punct behandelt.

177. In dem Augenblicke wo der Körper M, dessen Masse $\frac{Q}{g}$ ist, am Ende der Strecke x ankommt, hat er die Arbeit $\int_0^x (Q - F)\, dx$ oder $\int_0^x (Qdx - \frac{EA}{L} x\, dx)$ aufgenommen, und seine lebendige Potenz ist $\frac{1}{2}\frac{Q}{g} v^2$,

wenn v seine Geschwindigkeit bedeutet. Daher hat man (165 u. 167) durch Integration (GL. 286)

$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = Qx - \frac{1}{2}\frac{EA}{L}x^2. \qquad [31]$$

Es sei l die Verlängerung in dem Augenblicke wo die Spannung F gleich dem Gewichte Q ist. Dieß ist die Spannung welche der Stab annehmen und behalten würde, wenn man die Unterlage, welche den Körper anfangs getragen hat, sehr langsam entfernen wollte. Die Größe $\frac{l}{L}$, d. i. die auf jeden Meter der ursprünglichen Länge treffende Verlängerung des Stabes welcher das in Ruhe gedachte Gewicht Q trägt, nennt Poncelet die stabile Verlängerung (allongement de stabilité). Man hat dann in der Gleichung [30] $F = Q$, $x = l$ zu setzen; also

$$Q = \frac{EA}{L}l \quad \text{oder} \quad \frac{EA}{L} = \frac{Q}{l},$$

und dadurch erhält die Gleichung [31] die Gestalt

$$v^2 = \frac{g}{l}(2l - x)x. \qquad [32]$$

Folglich ist die Geschwindigkeit v proportional der Ordinate y eines Kreises über dem Durchmesser 2l, während x ein Segment dieses Durchmessers ist.

Das Maximum von v tritt ein für $x = l$, wie es auch sein muß, weil an dieser Stelle die Kraft F, welche dem Gewichte Q gerade entgegen wirkt, diesem gleich ist, und folglich ein noch weiteres Wachsen dieser Kraft die Bewegung zwingen müßte langsamer zu werden. Jenes Maximum der Geschwindigkeit ist $V = \sqrt{gl}$, also gleich der Fallgeschwindigkeit für die Höhe $\frac{1}{2}l$ (145).

Das Sinken des Körpers M und die Verlängerung des Stabes hört auf, wenn v null wird, was bei $x = 2l$ stattfindet; dann ist $F = 2Q$, so daß also an dieser äußersten Stelle die Verlängerung und die Spannung doppelt so groß sind als wenn der Stab den ruhenden Körper M zu tragen gehabt hätte.

178. Von dem Augenblicke an, wo der Stab die Verlängerung 2l angenommen hat, steigt der Körper M wieder empor. Die Formel [32] bleibt brauchbar, weil für jeden negativen Raum dx die Arbeit auch jetzt noch durch $(Q - F)\,dx$ ausgedrückt ist. Somit durchläuft der Körper M im Aufsteigen die nämlichen Puncte seines frühern Weges mit den nämlichen Geschwindigkeiten, aber in entgegengesetztem Sinne; hierauf beginnt er von neuem herabzusinken; u. s. f. Man fragt nun nach der Dauer einer solchen

Oscillation; und diese Aufgabe läßt sich leicht ohne Hülfe der Integralrechnung lösen.

Setzt man in [32] $v = \frac{dx}{dt}$ und $\sqrt{(2l - x)\,x} = y$,

so folgt
$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{y}. \qquad [33]$$

Es sei (Fig. 16) $AO = l$, $AM = x$, $MN = y$, $MM' = dx$, $NN' = ds$. Die ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecke MON, NPN' geben
$$\frac{NP}{MN} = \frac{NN'}{ON}, \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{y} = \frac{ds}{l},$$

und aus der Gleichung [33] wird
$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{ds}{l},$$
woraus folgt
$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{s}{l},$$
indem man $AN = s$ setzt, und unter t die Zeit versteht während welcher der Endpunct des Stabs von A nach M kommt. Mithin wächst die Zeit t proportional mit dem Bogen AN; und ein beweglicher Punct, welcher den Umfang ANB in der Art durchlaufen würde daß seine Projection auf die Verticale AB stets mit dem Standpuncte des Körpers M zusammenfiele, hätte also auf diesem Umfange eine gleichförmige Bewegung.

Um die Zeit des Herabsinkens von A nach B zu erhalten, hat man $s = \pi l$ (= dem Halbkreise ANB) zu setzen, wodurch sich $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ergibt. Dieß ist die Dauer einer einfachen Oscillation von A nach B oder von B nach A. Bezeichnet man also diese Dauer durch T, so hat man die Formel
$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.\,^{*)} \qquad [34]$$

---

*) Zu denselben Resultaten gelangt man durch Integralrechnung, indem man in [32] $\frac{dx}{dt}$ für v substituirt und dann den Ausdruck für dt von $x = 0$ an integrirt; man erhält nämlich
$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{l^2 - (l - x)^2}},$$
und (GL. 282, 251)
$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \text{arc.}\left(\cos = \frac{l - x}{l}\right).$$

179. Beispiel: $E = 2 . 10^{10}$; $L = 10^m$; $A = 0^{qm},0025$; $Q = 10000^{kg}$; also $\frac{Q}{A} = 4 . 10^6$; das Gewicht auf den Quadratmillimeter ist dann 4^{kg}.

Man findet
$$l = \frac{QL}{EA} = 0^m,002.$$

Maximum der Geschwindigkeit:
$$v = \sqrt{gl} = 0^m,140.$$

Dauer einer Doppel-Oscillation (hin und zurück):
$$2T = 6,283\sqrt{0,000204} = 0'',09.$$

Anzahl der Doppel-Oscillationen in der Secunde:
$$\frac{1}{2T} = 11,1.$$

180. Zweite Untersuchung. — Man nimmt an, der Körper M habe in dem Augenblicke wo der Stab sich zu verlängern beginnt, eine Anfangsgeschwindigkeit v_0; im Uebrigen bleiben die Angaben dieselben wie in der vorhergehenden Untersuchung.

Beläßt man den Buchstaben die nämlichen Bedeutungen welche sie in der vorigen Entwickelung hatten, so gibt der Lehrsatz vom Effect der Arbeit (Nr. 168)
$$\frac{1}{2}\frac{Q}{g}(v^2 - v_0^2) = \int_0^x (Q - F)\,dx = Qx - \frac{1}{2}\frac{EA}{L}x^2,$$
oder
$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}(2lx - x^2). \qquad [35]$$

Hieraus schließt man, wie in der ersten Untersuchung, daß das Maximum von v bei $x = l$ und $F = Q$ eintritt. Dieses Maximum, welches wir durch V bezeichnen, ist gegeben durch die Formel
$$V^2 = v_0^2 + gl.$$

Das Maximum X der Verlängerung x entspricht der Geschwindigkeit $v = 0$. Man hat daher, wenn man in [35] $v = 0$ setzt:
$$X^2 - 2lX = \frac{lv_0^2}{g},$$
und hieraus
$$X = l\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}\right).$$

Die entsprechende Spannung des Stabes ist nach [30]
$$\frac{EAX}{L} \quad \text{oder} \quad \frac{QX}{l} \quad \text{oder} \quad Q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{gl}}\right).$$

181. Beispiel. — Es gelten dieselben Angaben wie in Nr. 179. Außerdem sei $v_0 = 0^m,20$, entsprechend (145) der Fallhöhe

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 0^m,00204.$$

Die Länge l bleibt wie in Nr. 179, nämlich $0^m,002$.

Maximum der Geschwindigkeit:

$$V = \sqrt{0,04 + 0,019617} = 0,244.$$

Maximum der Verlängerung:

$$X = l\left(1 + \sqrt{1 + 2,04}\right) = 0,00548.$$

Maximum der Spannung:

$$\frac{QX}{l} = 2,74 \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot A = 10,96 \cdot 10^6 \cdot A,$$

was für den Quadratmillimeter $10^{kg},96$ gibt; so daß unter diesen Umständen gewisse Eisensorten in Gefahr kommen, eine Aenderung ihrer Elasticitätsverhältnisse zu erfahren.

182. Von dem Augenblicke an, wo die Verlängerung ihr Maximum erreicht hat, steigt der Körper M wieder auf; die Gleichung [35] behält ihre Anwendbarkeit, weil für jeden negativen Raum dx die Arbeit der Kräfte durch $(Q - F)\,dx$ ausgedrückt bleibt. Der Körper M nimmt also für die nämlichen Werthe von x die vorigen Geschwindigkeiten von neuem an, doch in entgegengesetztem Sinne. Er besitzt daher die aufsteigende Geschwindigkeit v_0 in dem Augenblicke wo der Stab in seinen natürlichen Zustand zurückgekommen ist. Aus dieser Lage würde der Körper, wenn er ohne Reibung längs des Stabes fortgleiten könnte, sich bis auf die zu v_0 gehörige Höhe $\frac{v_0^2}{2g}$ erheben, und dann zurückfallen. Ist er dagegen am Ende des Stabes befestigt, und kann letzterer sich nicht biegen, so muß der Stab sich zusammenziehen, wobei er auf den Körper einen Druck von oben nach unten übt, dessen Intensität immer noch durch die Formel $F = \frac{EAx'}{L}$ ausgesprochen wird, in welcher x' die Verminderung der Stablänge bedeutet. Die Einwirkung des Stabes auf den Körper ist daher, nach Intensität und Sinn, für alle möglichen Lagen durch die Formel [30] gegeben; nur hat man das Zeichen von x zu ändern wenn der Körper M sich oberhalb seiner anfänglichen Lage befindet. Auch paßt dann die Formel [35] auf alle positiven und negativen

Werthe von x; und wenn man in ihr $v = 0$ setzt, gibt sie die beiden äußersten Werthe von x, den einen positiv, den andern negativ, nämlich

$$l \pm \sqrt{l^2 + \frac{lv_0^2}{g}},$$

woraus folgt, daß die Weite der Oscillationen $2\sqrt{l^2 + \frac{lv_0^2}{g}}$ beträgt.

Der Gleichung [35] läßt sich eine einfachere Form geben. Es sei A (Fig. 17) der Ursprung der x; $AO = l$; $OB = OB' = \sqrt{l^2 + \frac{lv_0^2}{g}} = r$, so daß B und B′ die Grenzen für den Weg des beweglichen Punctes sind. Setzt man $AM = x$ und $OM = z$, so kann man die Gleichung [34] so transformiren daß in ihr z als die Veränderliche auftritt. Man hat nämlich

$$x = l - z, \qquad 2l - x = l + z,$$

also

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l}(l^2 - z^2),$$

oder, indem man für l^2 seinen aus der obigen Definition von r entnommenen Werth $r^2 - \frac{lv_0^2}{g}$ setzt:

$$v^2 = \frac{g}{l}(r^2 - z^2).$$

Die Geschwindigkeit v ist daher wieder der Ordinate eines Kreises proportional, der aber jetzt über BB′ oder 2r beschrieben wird; sie ist nämlich vorgestellt durch diese Ordinate MN oder y, multiplicirt mit dem Coefficienten $\sqrt{\frac{g}{l}}$. Hieraus schließt man, wie in Nr. 178, daß die Zeit, innerhalb welcher der Körper M irgend eine Strecke MM′ durchlaufen hat, dem Ausdrucke $\frac{\text{arc } NN'}{r}\sqrt{\frac{l}{g}}$ numerisch gleich ist; und daß die Dauer einer einfachen Oscillation, hin oder zurück, wieder durch $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ausgedrückt, mithin von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unabhängig ist.

183. Anmerkung. — Die auf den Körper M wirkende Kraft Q muß nicht nothwendig mit dem Gewichte dieses Körpers zusammenfallen, welches wir zu besserer Unterscheidung jetzt durch P bezeichnen wollen. (Man kann sich z. B. vorstellen, die constante Kraft Q werde durch ein Gas erzeugt, welches auf die eine Fläche eines am beweglichen Ende des Stabes angebrachten Kolbens vom Gewichte P einen constanten Druck ausübt.) In diesem

Falle ist, wenn man die Masse des Stabes durchweg vernachläßigt, die Gleichung des Arbeits-Effects die nämliche wie früher, nur daß auf ihrer linken Seite die Masse des Körpers M durch $\frac{P}{g}$ statt durch $\frac{Q}{g}$ auszudrücken ist. Man hat daher

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}(v^2 - v_0^2) = Qx - \frac{EA}{L} \cdot \frac{x^2}{2},$$

oder, wenn man $\frac{EA}{L}$ durch den Ausdruck $\frac{Q}{l}$ ersetzt, in welchem l immer noch die Verlängerung angibt die der Stab im Zustande der Ruhe unter dem Einflusse von Q erlangt hätte:

$$v^2 - v_0^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{Q}{P}(2lx - x^2).$$

Die Folgerungen aus dieser Gleichung sind dieselben wie oben, indem man blos in der frühern Formel g mit $g \cdot \frac{Q}{P}$ zu vertauschen hat.

184. Dritte Untersuchung. — Ein Stab erleidet in Ruhe einen Druck Q, der ihn um die Größe $l = \frac{QL}{EA}$ verkürzt hat. Dieser Druck wird plötzlich durch eine Zugkraft Q abgelöst, von derselben Intensität wie der vorausgegangene Druck. Man fragt wieder nach dem Bewegungsgesetze des Körpers M vom Gewichte P, welcher am Ende des Stabes befestigt ist, dessen Masse vernachläßigt werden soll.

Wir zählen immer die x im Sinne der Verlängerung, von dem Puncte aus, den das bewegliche Ende des Stabs einnimmt wenn die Spannung null ist. Die Gleichung des Arbeits-Effects gibt

$$\frac{Pv^2}{2g} = \int_{x=-l}^{x}\left(Qdx - \frac{EA}{L}xdx\right).$$

Das Integral muß mit $x = -l$ anfangen, weil an dieser Stelle die Geschwindigkeit v null ist. Wird dieses bestimmte Integral ausgerechnet (GL., 270), und dann $\frac{Q}{l}$ für $\frac{EA}{L}$ geschrieben, so findet sich

$$v^2 = \frac{g}{l} \cdot \frac{Q}{P}(2lx - x^2 + 3l^2).$$

Die beiden Grenzen des vom Puncte M durchlaufenen Wegs werden durch diejenigen Werthe von x bestimmt für welche die Geschwindigkeit null ist, nämlich $x' = -1$ und $x'' = 31$.

Die größte Verlängerung des Stabes ist also das Dreifache von der Verlängerung welche der Belastung Q im Zustande der Stabilität entsprechen würde. *)

185. Die bisher beantworteten Fragen sind als besondere Fälle in folgender Aufgabe enthalten:

Ein materieller Punct von der Masse m bewegt sich auf der Geraden AB (Fig. 18) in Folge einer Anfangsgeschwindigkeit v_0, welche er besaß als er durch den Punct M_0 ging; überdieß wirkt eine Kraft F auf ihn ein, die ihn gegen den Punct O der Geraden treibt, und welche sich proportional mit der Distanz des Beweglichen von diesem Puncte O ändert. Man verlangt das Gesetz dieser Bewegung.

In irgend einem Augenblick habe der materielle Punct die Lage M; die Distanz OM sei x. Die absolute Intensität der Kraft F in jenem Augenblicke ist fx, wenn f die der Distanz-Einheit entsprechende Intensität bezeichnet. Während die Strecke $dx = MM'$ durchlaufen wird, erzeugt die Kraft F die Arbeit $-fxdx$, gleichviel ob der bewegliche Punct auf der positiven Seite OB der Axe der x oder auf deren negativer Seite OA liege, und ob die Bewegung den Sinn von A nach B oder von B nach A habe. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck für die elementare Arbeit der Kraft F in jedem der vier möglichen Fälle richtig bleibt, indem die Distanz x negativ ist wenn der bewegliche Punct links vom Ursprung O liegt, das Differential dx aber negativ wird wenn die Bewegung von B nach A erfolgt.

---

*) Dieses Resultat stimmt mit demjenigen überein, welches Ch. Combes in seinem Werke über die Ausbeutung der Gruben (Traité de l'Exploitation des Mines, t. I, p. 504) gibt. Er fügt dort folgende Betrachtung bei:

„An gut construirten Maschinen wechseln die den Endpunct einer Stange angreifenden Kräfte allerdings nicht plötzlich ihre Richtung unter Beibehaltung ihrer „Intensität, wie wir angenommen haben. Wenn aber auch, statt jäher Umänderungen dieser Richtung, stufenweise Uebergänge stattfinden, ergeben sich doch daraus „in der Längenerstreckung der Stangen, welche abwechselnd gedehnt oder zusammengedrückt werden, Vibrationsbewegungen, die für die Stangen weit angreifender sind, „als eine andauernde Belastung sein würde. Dieß ist durch Erfahrung bewiesen, und „der Constructeur ermangelt nicht, darauf Rücksicht zu nehmen, wenn er die „Dimensionen solcher Stangen feststellt; der Querschnitt derselben muß, nach den „vorausgegangenen Bemerkungen, dreimal so groß sein als derjenige, mit welchem „man ausreichen würde wenn sie auf stetige Weise dem Maximum ihrer Anstrengung ausgesetzt blieben."

Durch Anwendung des Lehrsatzes vom Effect der Arbeit (168) erhält man nun

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_0{}^2 = -\int_{x_0}^{x} fxdx = \tfrac{1}{2}\,f\left(x_0{}^2 - x^2\right),$$

und hieraus

$$v^2 = \frac{f}{m}\left(\frac{mv_0{}^2}{f} + x_0{}^2 - x^2\right),$$

oder einfacher

$$v^2 = \frac{f}{m}\left(X^2 - x^2\right),$$

indem man die Constante $\frac{mv_0{}^2}{f} + x_0{}^2$ durch X^2 ausdrückt. Die Geschwindigkeit v ändert sich, wie man sieht, proportional mit der Ordinate ML, welche in einem mit dem Halbmesser $OB = X$ beschriebenen Kreise der Abscisse x entspricht. Nimmt man die Geschwindigkeit v_0 positiv an, so geht also der bewegliche Punct von M_0 bis B, dann von B nach A, hierauf von A nach B, u. s. f. Die Weite AB der Oscillation ist

$$2X \quad \text{oder} \quad 2\sqrt{\frac{mv_0{}^2}{f} + x_0{}^2}.$$

Um die Dauer einer Oscillation zu erhalten, oder auch die Zeit innerhalb welcher ein beliebiges Stück der Strecke AB durchlaufen wird, setzt man für v seinen Werth $\frac{dx}{dt}$ in die letzte Gleichung, bringt diese dadurch in die Form

$$dt = \sqrt{\frac{m}{f}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X^2 - x^2}}$$

und findet nun, durch Integration zwischen den Werthen x' und x'' von x,

$$t = \sqrt{\frac{m}{f}} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{X^2 - x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{f}} \left[\text{arc}\left(\sin = \frac{x''}{X}\right) - \text{arc}\left(\sin = \frac{x'}{X}\right) \right].$$

Somit wird die Distanz MN in der Zeit $\sqrt{\frac{m}{f}} \cdot \frac{\text{arc LP}}{OB}$ durchlaufen, und die Dauer T einer einfachen Oscillation oder des Laufes durch AB ist $\sqrt{\frac{m}{f}} \cdot \frac{\pi OB}{OB}$. Also schließlich

$$T = \pi\sqrt{\frac{m}{f}}.$$

Dieser Werth ist unabhängig von der Geschwindigkeit v_0, welche blos auf die Weite AB Einfluß hat.

2) Veränderliche geradlinige und horizontale Bewegung eines Körpers der auf der Oberfläche einer Flüssigkeit schwimmt.

186. Wir stellen uns vor, ein wie ein Schiff gestalteter Körper, welcher auf einem ruhigen Wasserspiegel schwimmt, erhalte im Sinne seiner Längendimension eine horizontale Translationsbewegung, und werde alsdann sich selbst überlassen. Es wird später gezeigt werden, daß jeder Punct des schwimmenden Körpers sich so bewegt wie ein materieller Punct, dessen Masse m der Masse des ganzen Körpers gleich wäre, und welcher noch der Einwirkung einer horizontalen, dem Sinne der Bewegung entgegengerichteten Kraft R ausgesetzt bliebe. Diese Kraft heißt der Widerstand der Flüssigkeit. Sind die Dimensionen des Schiffes klein im Verhältniß zu denen der Flüssigkeit auf welcher es sich bewegt, so kann, wie aus Versuchen hervorgeht, der Widerstand mit hinlänglicher Annäherung durch die Formel

$$R = c\Pi A \frac{v^2}{2g}$$

dargestellt werden, in welcher die Buchstaben folgende Bedeutungen haben: c ist ein Coefficient welcher von der mehr oder weniger schlanken Gestalt des Kiels abhängt, und nach Bossut's Beobachtungen 0,16 sein soll; Π bezeichnet das Gewicht eines Kubikmeters der Flüssigkeit; A das eingetauchte Flächenstück des größten Durchschnitts quer über den Kiel; v ist die Geschwindigkeit und mithin $\frac{v^2}{2g}$ die Höhe für diese Geschwindigkeit.

Wird Obiges vorläufig als Voraussetzung angenommen, so fragt es sich, nach welchem Gesetze die Bewegung von dem Augenblicke an erfolge, wo das Schiff, dessen Masse m ist und welches eine Geschwindigkeit v_0 besitzt, nur dem Widerstande der Flüssigkeit überlassen wird.

Die Gleichung dieser Bewegung ist

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{R}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{c\Pi A}{2mg} v^2.$$

Hiebei ist anzumerken, daß mg, das Gewicht des Schiffes, zugleich das Gewicht der vom ruhenden Schiffe verdrängten Flüssigkeit ist, wie später nachgewiesen werden soll. Bezeichnet man das Volum dieser Flüssigkeit mit Al, so ist ihr Gewicht ΠAl. Nach Substitution dieses Ausdrucks für mg in der vorhergehenden Gleichung ergibt diese

$$dt = -\frac{2l}{c} \cdot \frac{dv}{v^2}.$$

Integrirt man, von dem Augenblicke an wo die Geschwindigkeit den Werth v_0 hat, bis zu einem andern wo sie den Werth v annimmt, so kommt

$$t = \frac{2l}{c}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{v_0}{\frac{cv_0}{2l}t + 1}.$$

Wird für v sein Werth $\frac{dx}{dt}$ eingesetzt, dann durch dt multiplicirt und integrirt, so ergibt sich der durchlaufene Raum

$$x = 2{,}3026 . \frac{2l}{c} \log \left(\frac{cv_0}{2l}t + 1\right),$$

oder, wenn man $\frac{v_0}{v}$ für $\frac{cv_0}{2l}t + 1$ substituirt:

$$x = 2{,}3026 . \frac{2l}{c} \log \frac{v_0}{v}.$$

Diese Formel hätte man auch unmittelbar aus der ersten der obigen Gleichungen erhalten können, durch Integration derselben nach vorausgegangener Substitution des Werthes $\frac{dx}{v}$ für dt.

Die vorstehenden Formeln zeigen, daß, wenn die angenommenen Voraussetzungen in strenger Genauigkeit zuträfen, die Geschwindigkeit ohne Ende abnähme, ohne jemals die Grenze Null zu erreichen, und daß die Distanz x unbegränzt wachsen würde.

Setzt man z. B. $l = 20$ und mithin

$$\frac{2l}{c} = \frac{40}{0{,}16} = 250,$$

ferner $v_0 = 2$, so geben die Formeln

$$v = \frac{250}{t + 125}$$

und $$x = 575{,}65\ (0{,}30103 - \log v).$$

Hiernach berechnet sich die folgende Tafel, in welcher die Zeiten und die durchlaufenen Räume von dem Augenblicke und der Lage an gezählt sind wo die Geschwindigkeit 2 Meter betrug.

Zeit in Minuten.	Zeit t in Secunden.	Geschwindigkeit v in Metern.	Raum x in Metern.
		m	
1'	60"	1,35	98,26
2	120	1,02	168,34
3	180	0,82	222,90
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
10	600	0,345	439,34
20	1200	0,188	591,12
30	1800	0,130	683,35
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
100	6000	0,041	971,85
1000	60000	0,0041	1543,95

Da das Gesetz, daß der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, nicht streng genau ist, so werden diese Rechnungsresultate durch Versuche nicht vollkommen bestätigt.

3) Verticale Bewegung eines Körpers in einem widerstehenden Mittel.

187. Verticaler Fall. — Ein sphärischer Körper falle, in Folge der Schwere, vertical in der Luft. Wir suchen das Gesetz seiner Bewegung, unter der nicht völlig genauen Annahme, daß der Widerstand der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und durch die Formel

$$R = c\Pi A \frac{v^2}{2g}$$

ausgedrückt sei, in welcher c ein Coefficient ist dessen Werth für eine mäßige Geschwindigkeit ungefähr 0,60 beträgt; Π das Gewicht eines Cubikmeters Luft; A die Fläche eines größten Kreises der Kugel; v die Geschwindigkeit.

Die allgemeine Gleichung der Bewegung ist (wenn m die Masse der Kugel bedeutet)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - R}{m}.$$

Bedeutet Π' das Gewicht für den Cubikmeter des Stoffes aus dem die (als homogen vorausgesetzte) Kugel besteht, und r den Halbmesser der Kugel, so hat man

$$m = \frac{4}{3}\frac{Ar\Pi'}{g}.$$

Die vorige Gleichung geht dann über in

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{3c\Pi}{8r\Pi'} v^2$$

oder

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K},$$

wenn man durch K eine Länge $= \frac{8r\Pi'}{3c\Pi}$ bezeichnet.

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$dt = \frac{Kdv}{gK - v^2} = \left(\frac{dv}{\sqrt{gK} + v} + \frac{dv}{\sqrt{gK} - v}\right) \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{g}}$$

und nach Integration, von $v = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit) an:

$$t = \frac{2,3026}{2} \sqrt{\frac{K}{g}} \left(\log \frac{\sqrt{gK} + v}{\sqrt{gK} - v} - \log \frac{\sqrt{gK} + v_0}{\sqrt{gK} - v_0} \right).$$

Nimmt man an, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sei null, so reducirt sich die Formel auf

$$t = \frac{2,3026}{2} \sqrt{\frac{K}{g}} \log \frac{\sqrt{gK} + v}{\sqrt{gK} - v}.$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß Zeit und Geschwindigkeit gleichzeitig wachsen; niemals aber kann die Geschwindigkeit den Werth $\sqrt{gK}$ erreichen, und noch viel weniger ihn übertreffen, da t für $v = \sqrt{gK}$ unendlich groß wird.

Wollte man in der Gleichung $\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K}$, den Werth $v = \sqrt{gK}$ zulassen, so käme $\frac{dv}{dt} = 0$; d. h. die Geschwindigkeit $\sqrt{gK}$, einmal erlangt, würde sich gleichförmig erhalten so lange der Körper in der Luft noch fiele.

Auf die allgemeine Aufgabe zurückkommend, suchen wir den durchlaufenen Raum x als Function von v auszudrücken, und eliminiren zu diesem Ende dt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{K} \quad \text{und} \quad v = \frac{dx}{dt}.$$

Man findet

$$dx = \tfrac{1}{2} K \frac{2vdv}{gK - v^2},$$

und durch Integration

$$x = \frac{2,3026}{2} K \left[\log (gK - v_0^2) - \log (gK - v^2) \right].$$

Um aber beim Gebrauche dieser Formeln Resultate von einiger Genauigkeit zu erlangen, hat man zu berücksichtigen, daß der Coefficient c, welcher im Nenner von K vorkommt, nicht völlig constant ist. Wir ziehen aus Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle (p. 618) die folgende Tafel aus, welche auf den Versuchen von Robins und Hutton beruht.

$v = 1^m$	3^m	5^m	10^m	25^m	50^m	100^m	200^m	300^m	400^m	500^m
$c = 0,59$	0,61	0,63	0,65	0,67	0,69	0,71	0,77	0,88	0,99	1,04

Man wird daher in den vorausgegangenen Formeln der Geschwindigkeit v, von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 an, wachsende Werthe beilegen, und für jedes Intervall zwischen zwei auf einanderfolgenden Geschwindigkeiten einen Werth von c aus der Tafel entnehmen. Auf diese Art erhält man für dieses Intervall die Constante K, deren man sich nun bedienen kann um mittels der Formeln die Zeit t und den Raum x berechnen, welche dem nämlichen Intervall zwischen zwei bekannten Geschwindigkeiten entsprechen. So fährt man fort, bis die Summe aus den Unterabtheilungen der Zeiten oder der Räume eine gegebene Zeit oder einen gegebenen Raum übersteigt. Eine leichte Interpolation liefert dann mit hinreichender Annäherung die Zeit in welcher ein bekannter Raum zurückgelegt wird, oder den in einer gegebenen Zeit durchlaufenen Raum.

188. **Aufsteigung.** — Ein sphärischer Körper werde vertical emporgeworfen, mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0. Zählen wir die positiven x und die Geschwindigkeit von unten nach oben, so ist die Grundgleichung der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-mg - R}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2}{K},$$

indem man die vorigen Bezeichnungen beibehält. Man findet hieraus

$$dt = -\sqrt{\frac{K}{g}} \cdot \frac{\frac{dv}{\sqrt{gK}}}{1 + \frac{v^2}{gK}},$$

und durch Integration (GL. 297) *)

$$t = \sqrt{\frac{K}{g}} \left[\operatorname{arc}\left(tg = \frac{v_0}{\sqrt{gK}}\right) - \operatorname{arc}\left(tg = \frac{v}{\sqrt{gK}}\right) \right].$$

Diese Formel vereinfacht sich, wenn man $\frac{v_0}{\sqrt{gK}} = tg\alpha$ und $\frac{v}{\sqrt{gK}} = tg\,\beta$, also $t = \sqrt{\frac{K}{g}}\,(\alpha - \beta)$ setzt. Nun ist (GL. 58)

$$tg\,(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta} = \frac{\sqrt{gK}\,(v_0 - v)}{gK - v_0 v},$$

woraus folgt

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{gK}\;.\;\operatorname{arc}\left[tg = \frac{\sqrt{gK}\,(v_0 - v)}{gK - v_0 v}\right].$$

Setzt man in dieser Formel $v = 0$, so erhält man für t die Dauer des Aufsteigens; nach Ablauf derselben fällt der Körper zurück, und die Formel verliert ihre Brauchbarkeit, weil der Widerstand R die Richtung umwechselt.

---

*) Daß $\frac{dx}{1 + x^2}$ das Differential des Bogens zur Tangente x ist, läßt sich durch geometrische Construction auf folgende Weise zeigen. Es sei (Fig. 18b) $AM = x$ und $MM' = dx$. Errichtet man auf AM die Senkrechte $AO = 1$, so ist $OM^2 = 1 + x^2$ und folglich

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{MM'}{OM^2}.$$

Aus dem Mittelpuncte O beschreibe man die Bögen ABB', MN. Das unendlich kleine Dreieck MNM' ist dem Dreieck OAM ähnlich, und die Bögen BB', MN verhalten sich wie ihre Halbmesser. Man hat daher

$$\frac{MM'}{OM} = \frac{MN}{OA} \quad \text{und} \quad \frac{OA}{OM} = \frac{BB'}{MN},$$

woraus man durch Multiplication (und wegen OA=1) erschließt:

$$\frac{MM'}{OM^2} = BB'.$$

Nun ist $x = OA\,.\,tg\,AOB$; der Winkel AOB wird durch $\frac{\operatorname{arc} AB}{OA}$ ausgedrückt (GL. 28); da aber der Halbmesser OA die Einheit ist, so hat man $x = tg\,(\operatorname{arc} AB)$ oder $AB = \operatorname{arc}\,(tg = x)$. Das Differential des Bogens AB, welches dem Zuwachse dx von x entspricht, ist BB'; folglich

$$\frac{dx}{1 + x^2} = d\,\operatorname{arc}\,(tg = x),$$

Um den aufsteigend durchlaufenen Raum x als Function der Geschwindigkeit v zu erhalten, eliminirt man dt aus den Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{v^2}{K} \quad \text{und} \quad v = \frac{dx}{dt};$$

man findet

$$dx = -\tfrac{1}{2}\,K\,\frac{2vdv}{gK + v^2},$$

und durch Integration

$$x = \frac{2{,}3026}{2}\,K\left[\log\,(gK + v_0^2) - \log\,(gK + v^2)\right].$$

Wird in dieser Formel $v = 0$ gesetzt, so ergibt sich die Höhe der ganzen aus der Geschwindigkeit v_0 folgenden Aufsteigung.

Beispiel. — Eine Kugel vom Halbmesser $0^m{,}015$, aus einer Holzart von welcher der Kubikmeter 800 Kilogr. wiegt, ist mit einer Geschwindigkeit von 10 Meter aufgeworfen. Das Gewicht eines Kubikmeters Luft von $10C^0$ beträgt $1^{kg}{,}25$. Nimmt man $c = 0{,}60$, so hat man hier

$$K = \frac{8\,.\,0{,}015\,.\,800}{3\,.\,0{,}6\,.\,1{,}25} = 42{,}67;$$

$$\frac{2{,}3026}{2}\,K = 49{,}12; \quad gK = 418{,}5.$$

Die Steighöhe ist daher

$$49{,}12\,(\log 518{,}5 - \log 418{,}5) = 4{,}57,$$

während sie im leeren Raum 5,10 sein würde.

Die Dauer T der ganzen Erhebung ergibt sich, wenn man in dem frühern Ausdruck, der oben für die Zeit t gefunden wurde, $v = 0$ setzt; nämlich

$$T = \frac{1}{g}\sqrt{gK}\,.\,\mathrm{arc}\left[\mathrm{tg} = \frac{v_0}{\sqrt{gK}}\right].$$

In unserem Beispiele ist $\log \sqrt{gK} = 1{,}310848$; $\sqrt{gK} = 20{,}457$; $\log \mathrm{tg} = 0{,}689152 - 1$; der zugehörige Winkel beträgt $26^0\,3'{,}03$ und muß hier durch das Verhältniß des Bogens zum Halbmesser ausgedrückt werden, also (Gl. 28) durch $\frac{26{,}05\,.\,\pi}{180} = 0{,}455$. Mithin ist

$$T = \frac{20{,}457\,.\,0{,}455}{9{,}81} = 0{,}949,$$

während das Aufsteigen im leeren Raume $\frac{10''}{g}$ oder $1''{,}0195$ gedauert

hätte. Der Luftwiderstand übt also größern Einfluß auf die Höhe der Aufsteigung als auf ihre Dauer.

4) Beispiel einer geradlinigen alternativen Bewegung.

189. Ein Körper, den wir in Gedanken auf einen materiellen Punkt reduciren, habe auf einer geraden Linie eine abwechselnd hin- und hergehende Bewegung, ähnlich der des Kolbens einer Dampfmaschine. Um eine bestimmte Anschauung zu haben, nehmen wir jene Gerade horizontal an. Es sei $A_1 A_2$ (Fig. 19) der Raum, den der Körper abwechselnd in dem einen oder dem andern Sinne durchläuft. Zur Vermittelung dieser Wechselbewegung ist eine umlaufende Welle vorhanden, deren Axe die Richtung der Geraden $A_1 A_2$ in einem Puncte C ihrer Verlängerung senkrecht schneidet; ein Ansatzstück CB der Welle, die Kurbel, wird von dieser bei ihrer Rotationsbewegung mit herumgeführt; am Ende B der Kurbel befindet sich ein abgerundeter Zapfen (die Warze) dessen Axe parallel zur Axe C ist, und welcher von dem einen Ende der Lenkstange BM umfaßt wird, während das andere Ende M dieser letztern durch ein Gelenk mit einer zweiten Stange MA zusammenhängt, welche, zwischen Führungen gleitend, sich nur längs der Geraden CA_2 bewegen kann. An dieser zweiten Stange ist nun in A der Körper befestigt, dessen Bewegung wir betrachten wollen. Es ist klar, daß die Weite des Laufs $A_1 A_2$ dem Durchmesser $B_1 B_2$ des Kreises gleich ist, den das Centrum B des Kurbelgelenks beschreibt.

190. Die Bewegung des in Rede stehenden Körpers ist die nämliche wie die des Punctes M. Es sei

x die veränderliche Distanz CM;
r der Arm CB der Kurbel;
l die Länge BM der Lenkstange;
α der veränderliche Winkel B_1CB des Kurbelarms mit der Horizontalen CB_1;

und unsere nächste Aufgabe soll nun sein, das Gesetz für die Bewegung des Punctes M auszudrücken, indem wir die Bewegung der Kurbel als gegeben voraussetzen.

Das Dreieck CBM liefert zwischen den beiden Veränderlichen x und α die Relation

$$l^2 = r^2 + x^2 + 2rx \cos \alpha. \qquad [36]$$

Betrachtet man x und α als Functionen der Zeit t, so findet man durch Differentiation

$$0 = x \frac{dx}{dt} + r \cos \alpha \, . \frac{dx}{dt} - rx \sin \alpha \, . \frac{d\alpha}{dt},$$

oder, wenn die Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ des Punctes M durch v, die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\alpha}{dt}$ der Kurbel durch ω bezeichnet wird:

$$xv + rv \cos\alpha - rx\omega \sin\alpha = 0. \qquad [37]$$

Differentiirt man von Neuem diese Gleichung, in welcher im Allgemeinen v und ω ebensowohl Functionen von t sind wie x und α, so erhält man

$$v\frac{dx}{dt} + x\frac{dv}{dt} + r\cos\alpha \,.\, \frac{dv}{dt} - rv\sin\alpha \,.\, \frac{d\alpha}{dt}$$

$$- r\omega\sin\alpha \,.\, \frac{dx}{dt} - rx\omega\cos\alpha \,.\, \frac{d\alpha}{dt} - rx\sin\alpha \,.\, \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

oder, wenn man wieder $\frac{dx}{dt}$ durch v und $\frac{d\alpha}{dt}$ durch ω ersetzt:

$$v^2 + x\frac{dv}{dt} + r\cos\alpha \,.\, \frac{dv}{dt} - 2rv\omega\sin\alpha$$

$$- rx\omega^2\cos\alpha - r\,x\sin\alpha\frac{d\omega}{dt} = 0. \qquad [38]$$

Da die Bewegung der Kurbel gegeben ist, und man mithin ihre Winkelgeschwindigkeit ω und ihre Winkelbeschleunigung $\frac{d\omega}{dt}$ für einen beliebigen Werth von α oder von t kennt, so lassen sich mittels der drei vorhergegangenen Gleichungen [36], [37], [38] für jede Stellung der Kurbel die entsprechenden Werthe von x, v und $\frac{dv}{dt}$ finden.

191. Zur Vereinfachung betrachten wir den Fall wo die Winkelgeschwindigkeit ω constant und überdieß die Länge l der Lenkstange im Vergleich zum Kurbelarm r sehr groß ist. In diesem Falle unterscheidet sich die Länge l oder BM sehr wenig von ihrer Projection MP, so daß nahezu

$$l = x + r\cos\alpha. \qquad [39]$$

Durch Differentiation (in derselben Art wie oben) erhält man

$$0 = \frac{dx}{dt} - r\sin\alpha \,.\, \frac{d\alpha}{dt} \quad \text{oder} \quad v = r\omega\sin\alpha, \qquad [40]$$

und dann $\frac{dv}{dt} = r\omega\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$ oder $\frac{dv}{dt} = r\omega^2\cos\alpha.$ *) [41]

*) Vergl. die Note zu Nro. 16.

192. Es fragt sich nun, welche Kräfte nöthig sind, um die Bewegung zu erzeugen deren Gesetz wir eben abgehandelt haben. Wir wollen annehmen, es wirke auf den am Endpuncte A der Stange MA angebrachten Körper im Sinne seiner Bewegung eine bekannte Kraft F, von constanter Intensität und unabhängig von dem Einflusse der Stange. (Man kann sich z. B. denken, diese Kraft F werde durch Dampf ausgeübt, der auf die eine Fläche eines Kolbens in der ganzen Erstreckung seines Laufs wirkt, dann auf die andere Fläche, und so abwechselnd fort, immer im Sinne der Bewegung). Diese Kraft ist also positiv während der Bewegung von A_1 nach A_2, und negativ während des Rückwegs von A_2 nach A_1. Außer der Kraft F nimmt aber der betrachtete Körper noch von der Stange MA eine Kraft T auf, welche positiv oder negativ, als Pressung oder Spannung, wirkt, und um deren Bestimmung sich's hier handelt.

Während des Laufes von A_1 nach A_2 haben wir, wenn m die Masse des Beweglichen bezeichnet:

$$m\frac{dv}{dt} = F + T,$$

oder, wenn wir uns auf den besondern Fall der vorhergehenden Nummer beschränken und für die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ ihren Werth aus [41] setzen:

$$T = mr\omega^2 \cos\alpha - F.$$

Die äußersten Werthe von T treten an den beiden Endpuncten des Laufes ein, und sind

in A_1, wo $\cos\alpha = 1$: $\quad T_1 = mr\omega^2 - F$;
in A_2, wo $\cos\alpha = -1$: $\quad T_2 = -(mr\omega^2 + F)$.

T_1 kann Pressung oder Spannung sein, jenachdem $mr\omega^2$ größer oder kleiner als F ist; T_2 ist bei unserer Voraussetzung über die Richtung der Kraft F immer eine Spannung; der Unterschied $T_1 - T_2$ ist stets $2mr\omega^2$.

193. Die nämlichen Formeln lassen sich durch Aenderung des Vorzeichens von F auch für den Fall anwenden daß die Kraft F der Bewegung entgegen wirkt, wie eine Reibung.

Diese Resultate sind von Nutzen für die Bestimmung der Dimensionen, welche man der Stange MA und der Lenkstange zu geben hat, damit sie den ihnen zugemutheten Anstrengungen gewachsen sind.

5) Geradlinige Bewegung zweier Körper welche durch wechselseitige Einwirkung untereinander verbunden sind.

194. Von zwei Körpern, deren Massen m, m′ sind und welche sich auf einer durch ihre Schwerpuncte gehenden Geraden bewegen, nehmen wir an,

daß sie eine wechselseitige Einwirkung f auf einander üben, und daß man diese Wirkung f als Function ihrer Distanz-Aenderung kennt. Der Körper m nimmt nämlich in jedem beliebigen Augenblicke vom Körper m′ eine anziehende oder abstoßende Kraft f auf, und äußert in demselben Augenblicke gegen den Körper m′ eine andere Kraft f, welche der erstern gleich aber entgegengesetzt, und also, wie diese, anziehend oder abstoßend ist. Man verlangt nun das Gesetz für die relative Bewegung beider Körper, wenn man diese wie zwei materielle Puncte betrachtet, und für ihre absoluten Bewegungen.

Wir werden diese Aufgaben zuerst ganz allgemein behandeln, und nachher als Beispiel zwei Kugeln nehmen welche durch einen vollkommen elastischen Faden verbunden sind.

Es bezeichne L die Distanz in welcher die Wechselwirkung beider Körper einen als bekannt angenommenen Werth hat. Geht diese Distanz in $L + x$ über, so ist die Wechselwirkung der Körper eine Function von x, die wir mit $\mathfrak{f}\{x\}$ bezeichnen wollen.

Für den Augenblick, in welchem die Distanz den Werth $L + x$ erlangt hat, seien v und v′ die Geschwindigkeiten beider Körper; $v' - v$ ist ihre relative Geschwindigkeit, welche u heißen möge; also

$$v' - v = u. \qquad [42]$$

Diese relative Geschwindigkeit hängt blos ab von der Aenderung der Distanz $L + x$ in der Zeit dt; man hat

$$u = \frac{dx}{dt}. \qquad [43]$$

Betrachtet man die Bewegung eines jeden Körpers einzeln, und denkt man sich die Kraft $\mathfrak{f}\{x\}$ anziehend, so hat man die Beschleunigungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathfrak{f}\{x\}}{m}, \qquad [44]$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{-\mathfrak{f}\{x\}}{m'}. \qquad [45]$$

Durch die vier Relationen [42], [43], [44], [45] zwischen den fünf Veränderlichen v, v′, u, x, t ist die vorgelegte Aufgabe in Gleichungen gebracht.

195. Aus der Gleichung [42] folgt $\frac{dv'}{dt} - \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$, und nach Substitution der Werthe [44], [45]:

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\mathfrak{f}\{x\}.$$

Durch Elimination von dt aus dieser Gleichung und der Gleichung [43] kommt

$$udu = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) f\{x\} dx.$$

Integrirt man und bezeichnet durch u_0 die relative Geschwindigkeit für den Augenblick wo $x = x_0$ ist, so ergibt sich

$$\tfrac{1}{2}\left(u^2 - u_0^2\right) = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \int_{x_0}^{x} f\{x\} dx. \qquad [46]$$

Angenommen, es lasse sich das Integral unter allgemeiner Form erhalten. Man findet dann aus der Gleichung [46] u als Function von x; es sei

$$u = f_1\{x\}. \qquad [47]$$

Hieraus folgt, wegen [43]:

$$dt = \frac{dx}{f_1\{x\}} \quad \text{und} \quad t = \int \frac{dx}{f_1\{x\}}. \qquad [48]$$

Diese Gleichungen [47] und [48] enthalten das verlangte Gesetz der relativen Bewegung beider Körper.

196. Um die absolute Bewegung jedes Körpers zu bestimmen, hat man in den Gleichungen [44] und [45] den obigen durch x und dx ausgedrückten Werth von dt zu substituiren. Man erhält

$$dv = \frac{f\{x\}}{m f_1\{x\}} dx \qquad [49]$$

und

$$dv' = \frac{-f\{x\}}{m' f_1\{x\}} dx. \qquad [50]$$

Die Bestimmung von v und v' in Function von x ist dann auf die Aufgabe einer Quadratur zurückgeführt; und wenn man die erhaltenen Resultate mit der Gleichung [48] verbindet, kann man beliebig viele zusammengehörige Werthe von v, v' und t berechnen.

197. Es bestehe z. B. die anziehende Kraft $f\{x\}$ in der Federung eines elastischen Fadens von der ursprünglichen Länge L, dessen Masse vernachläßigt wird. Diese Kraft sei proportional der Längenzunahme x, und man habe, wie in Nr. 176, $f\{x\} = \frac{EA}{L} x$.

Die Gleichung [46] wird dann

$$\tfrac{1}{2}(u^2 - u_0^2) = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{EA}{L}\cdot\frac{x^2}{2}$$

und liefert

$$u^2 = u_0^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{EA}{L}x^2. \qquad [51]$$

Durch diese Gleichung ist das Gesetz ausgesprochen, nach welchem die relative Geschwindigkeit u abnimmt während die Distanz L + x wächst.

Die größte Verlängerung des Fadens tritt ein bei u = 0, d. h. in dem Augenblicke wo die beiden Körper einerlei absolute Geschwindigkeit haben. Ist X diese Verlängerung, so hat man

$$u_0^2 - \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{EA}{L}X^2 = 0;$$

und die Spannung des Fadens, welche im Allgemeinen $\frac{EAx}{L}$ ist, wird

$$\frac{EA}{L}X = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}}\frac{EA}{L}}\cdot u_0.$$

Ueberschreitet dieser Werth diejenige Grenze, über welche hinaus die Verlängerungen nicht mehr den Spannungen proportional sind, so tritt Gefahr des Abreißens ein; und der Faden wird sicher reißen, sobald die obige Spannung das Gewicht übertrifft welches der Faden eben noch tragen kann.

Das Abreißen kann aber schon erfolgen ehe die relative Geschwindigkeit null ist, oder bevor noch die Geschwindigkeit v der Masse m und die Geschwindigkeit v' der Masse m' einander gleich geworden sind. Um dieß einzusehen, führe man in dem Ausdrucke der Spannung $\frac{EA}{L}x$ den aus der Gleichung [51] gezogenen Werth von x ein; man erhält

$$\left(\frac{EAx}{L}\right)^2 = \frac{u_0^2 - u^2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}}\cdot\frac{EA}{L},$$

und dieser Ausdruck kann selbst in dem Falle, daß u nur wenig von u_0 verschieden ist, einen großen Werth geben, wenn die Straffheit $\frac{EA}{L}$ beträchtlich ist.

Diese Theorie macht durch Analogie begreiflich, wie eine Flintenkugel durch ein Brett oder eine Fensterscheibe ein Loch schlagen kann während sie den unberührt gebliebenen Nachbartheilen nur eine sehr kleine Geschwindigkeit

ertheilt. Es wurde nämlich diese Geschwindigkeit, obgleich sie fast unmerklich ist, in einer so kurzen Zeit erlangt, daß sie zwischen dem fortgerissenen Theile und seiner Umgebung eine Kraftäußernng erfordert, bei welcher das Holz oder das Glas bricht.

Die Berechnung der Zeit, während welcher der Faden aus der Länge L in die Länge $L + x$ übergeht, macht zuerst in der Gleichung [51] die Substitution von $\frac{dx}{dt}$ für u nöthig; hieraus ergibt sich dann dt unter der Form $\frac{dx}{\sqrt{u_0^2 - k^2x^2}}$, welche leicht zu integriren ist. (GL. 296, oder nach der geometrischen Methode der Nr. 178).

198. Die Annahme (195), daß sich $\int \mathfrak{F}\{x\}\,dx$ durch einen allgemeinen Ausdruck darstellen lasse, trifft nicht immer zu. Die vorstehenden Aufgaben können aber immer durch Annäherung gelös't werden, von welcher Beschaffenheit auch die durch $\mathfrak{F}\{x\}$ ausgedrückte Relation zwischen der Wechselwirkung beider Körper und ihrer Distanz sein möge, wenn sie nur überhaupt bekannt ist.

Man construire eine Curve, welche die verschiedenen Werthe von x zu Abscissen und die entsprechenden Werthe der Kraft $\mathfrak{F}\{x\}$ zu Ordinaten hat; die Berechnung der Flächenstücke dieser Curve (GL., 299 u. f.) gibt eine Reihenfolge von Werthen für $\int \mathfrak{F}\{x\}\,dx$, aus denen man, nach der Gleichung [46], die zugehörigen Werthe von u findet.

Falls die Wirkung $\mathfrak{F}\{x\}$ durch einen dehnbaren Faden ausgeübt wird, hat man zuzusehen, ob die relative Geschwindigkeit u null werden kann ohne daß der Werth von x größer ist als die Verlängerung welche dem Zerreißen des Fadens unmittelbar vorangeht; wo nicht, so wird der Faden reißen.

Hat man die Werthe von u, so berechnet man die von $\frac{1}{u}$ oder $\frac{1}{\mathfrak{F}_1\{x\}}$. Dann construirt man eine Curve welche diese Werthe zu Ordinaten hat, berechnet ihre Flächenräume, und erhält so nach der Gleichung [48] die den verschiedenen Werthen von x entsprechenden Werthe von t. Durch Anwendung der nämlichen Methode auf die Gleichungen [49] und [50] vervollständigt sich die Lösung der Aufgabe.

199. In Poncelet's Introduction à la Mécanique industrielle (p. 345) findet man die durch Versuche ermittelten Constanten ꝛc. angegeben, welche man für verschiedene Anwendungen der vorstehenden Theorie nöthig hat.

Hier folgen z. B. die Verlängerungen eines Eisendraths unter verschiedenen Belastungen.

Belastungen ausgedrückt in Kilogr. auf den Quadrat-Millimeter.	Verlängerungen ausgedrückt in Millimetern auf den Längen-Meter.	
	Weiches oder geglühtes Eisen.	Hartes oder ungeglühtes Eisen.
kg	mm	mm
5,0	0,29	0,26
10,0	0,59	0,52
15,0	0,88	0,78
20,0	1,18	1,04
25,0	1,47	1,30
30,0	2,50	1,56
32,5	13,00	" "
35,0	14,10	2,22
40,0	18,00	2,40
42,5	20,50	" "
45,0	Bruch.	2,82
49,0		3,10
50,0		Bruch.

Zweites Kapitel.

Absolute krummlinige Bewegung eines materiellen Puncts.

---

§. 1. Von der Resultante mehrerer Kräfte welche gleichzeitig den nämlichen Punct in verschiedenen Richtungen angreifen. — Zusammensetzung und Zerlegung solcher Kräfte.

200. Wenn auf einen materiellen Punct mehrere Kräfte gleichzeitig in verschiedenen Richtungen wirken, so stützt sich die Bestimmung der statthabenden Bewegung auf das Princip der relativen Bewegungen (134), welches uns (135) zur Feststellung des Satzes gedient hat, daß die Kräfte den Beschleunigungen proportional sind die sie einer und der nämlichen Masse bei geradliniger Bewegung ertheilen.

Wir betrachten zuerst einen von der Ruhe ausgehenden Punct unter der Einwirkung zweier Kräfte F', F'', welche nach Intensität und Richtung constant sind, d. h. so daß sie mit dem von ihnen angegriffenen Punct parallel zu ihren ursprünglichen Lagen fortrücken.

Es sei A (Fig. 20) die Anfangslage des Beweglichen.

$AB = X$ sei der Weg, durch welchen die Kraft F' allein das Bewegliche in der Zeit t treiben würde; also nach der dritten Gleichung [24] der Nr. 153, indem man in ihr $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ setzt:

$$X = \frac{1}{2}\frac{F'}{m}t^2.$$

Eben so sei $AC = Y$ der Weg, den unter gleichen Umständen die Kraft F'' zur Folge haben würde; also

$$Y = \frac{1}{2}\frac{F''}{m}t^2.$$

Stellt man sich um den betrachteten materiellen Punct eine bewegliche Hülle vor, deren sämmtliche Puncte die nämliche beschleunigte Bewegung

haben welche der materielle Punct vermöge der einzigen Kraft F′ annehmen würde, so wird letzterer in Beziehung auf diese Hülle eine der Kraft F″ entsprechende relative Bewegung annehmen, genau so als ob weder die Bewegung der Hülle noch die Kraft F′ vorhanden wäre. In derselben Zeit t also, welche die Gerade AC (als eine Reihe geometrischer Puncte betrachtet welche mit der Hülle verbunden sind) braucht, um sich in die Lage BM (gleich und parallel mit AC) zu versetzen, wird sich der besprochene materielle Punct von einem Endpuncte der AC zum andern begeben, und sich zuletzt in M befinden.

Man schließt hieraus:

1) daß der bewegliche materielle Punct die Ebene nicht verläßt welche durch die ursprünglichen Richtungen der beiden Kräfte bestimmt ist;

2) daß er die Diagonale des Parallelogramms durchläuft dessen Seiten die nämlichen Richtungen wie die Kräfte haben und den Intensitäten derselben proportional sind; denn die Elimination von t aus den beiden Ausdrücken für X und Y gibt $\frac{Y}{X} = \frac{F''}{F'}$;

3) daß die Räume, welche er vom Ausgangspuncte A an durchläuft, den Quadraten der Zeiten t proportional sind, wie X und Y;

4) daß er sich bewegt wie wenn er von einer einzigen Kraft R angegriffen wäre, welche längs jener Diagonale gerichtet ist und die Gleichung $AM = \frac{R}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$ befriedigt, durch deren Verbindung mit $AB = \frac{F'}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$ und $AC = \frac{F''}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$ sich ergibt:

$$R : F' : F'' = AM : AB : AC. \quad [52]$$

Trägt man nun von A aus auf den Richtungen der Kräfte F′, F″ zwei diesen Kräften proportionale Strecken Ab, Ac ab, so sind dieselben auch den Wegen AB und AC proportional; und wenn man das Parallelogramm Abmc vollendet, so fällt seine Diagonale mit der des ähnlichen Parallelogramms ABMC zusammen; man hat

$$Am : Ab : Ac = AM : AB : AC,$$

und mithin
$$R : F' : F'' = Am : Ab : Ac.$$

Also:

Lehrsatz. Die Kraft R, welche für sich allein einem freien, vom Zustande der Ruhe ausgehenden materiellen Puncte die nämliche Bewegung verleihen würde die er durch das Zusammenwirken zweier Kräfte F′, F″ erlangt, ist nach Intensität und Richtung dargestellt durch die Diagonale des Parallelo-

gramms über den beiden Linien, welche in gleicher Weise die gegebenen Kräfte darstellen.

Die Kraft R heißt die Resultante oder Mittelkraft der Kräfte F′, F″, welche ihrerseits die Composanten oder Seitenkräfte von jener sind; und der obige Satz führt den Namen Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte.

201. Man kann auch sagen, die Resultante zweier auf einen Punct zusammenwirkenden Kräfte, welche nach Intensität und Richtung durch zwei Gerade AB, AC dargestellt sind, sei in gleicher Art durch die dritte Seite AM eines Dreiecks (ABM oder ACM) dargestellt, dessen erste Seite eine der Geraden AB, AC, und dessen zweite Seite mit der andern Geraden in einerlei Sinn parallel ist.

202. Ein von der Ruhe ausgehender materieller Punct werde von drei Kräften F′, F″, F‴ angegriffen. Innerhalb einer Hülle, begabt mit derjenigen Bewegung welche der Punct bei alleiniger Wirkung der Kraft F‴ annehmen würde, hat dieser Atom vermöge der Kräfte F′, F″ die nämliche relative Bewegung wie wenn jene Hülle unbeweglich bliebe und nur die beiden letzten Kräfte vorhanden wären (134); diese relative Bewegung ist daher dieselbe welche durch die Resultante von F′ und F″ erzeugt worden wäre. Wir wollen diese Resultante, welche nach der oben ausgesprochenen Regel bestimmt werden kann, durch Res. (F′, F″) bezeichnen. Die absolute Bewegung des materiellen Puncts ergibt sich nun aus der gemeinsamen durch F‴ veranlaßten Bewegung, und der relativen Bewegung welche aus Res. (F′, F″) entspringt; sie ist also von der Art, daß sie durch eine einzige Kraft hervorgebracht werden könnte, welche man aus den beiden Kräften Res. (F′, F″) und F‴ nach dem obigen Lehrsatze zusammensetzt.

Dieselben Schlüsse wiederholen sich bei vier Kräften, indem man eine Hülle mit derjenigen Bewegung begabt denkt, welche einer dieser Kräfte entsprechen würde. Und wenn man so fortfährt, gelangt man zur Resultante für eine beliebige Anzahl Kräfte welche einen materiellen Punct durch gleichzeitigen Angriff aus der Ruhe treiben. Man findet diese Resultante nach der folgenden Regel.

Lehrsatz vom Polygon der Kräfte. Die Resultante R für beliebig viele auf einen materiellen Punct wirkende Kräfte F′, F″, ... $F^{(n)}$ ist nach Größe und Richtung durch die Gerade dargestellt, welche das im Angriffspuncte entspringende Polygon schließt, dessen Seiten den (durch Gerade dargestellten) Composanten gleich und im nämlichen Sinne parallel zu ihnen sind.

203. Hieraus und aus einem bekannten Satze über die Projection eines Polygon-Umfangs (GL. 22) folgt:

Wenn R_x, F'_x, F''_x.... die Projectionen der Resultante R und ihrer Composanten F', F''.... auf eine Axe Ox bedeuten, so hat man bei jeder beliebigen Lage der Coordinatenebene yOz:

$$R_x = F'_x + F''_x + \ldots + F_x^{(n)},$$

oder in Abkürzung:

$$R_x = \Sigma F_x, \qquad [53]$$

d. h. die Projection der Resultante mehrerer in einem Puncte zusammenwirkender Kräfte auf irgend eine Axe ist gleich der Summe aus den Projectionen der Composanten auf die nämliche Axe.

204. Kennt man die Intensitäten der Kräfte F', F'', ... $F^{(n)}$ und ihre Winkel gegen drei rechtwinkelig verbundene Axen, so ergibt sich die Intensität und die Richtung der Resultante R mittels der Formeln

$$\left.\begin{aligned} R \cos(R,x) &= \Sigma F \cos(F,x) \\ R \cos(R,y) &= \Sigma F \cos(F,y) \\ R \cos(R,z) &= \Sigma F \cos(F,z) \\ R = \sqrt{[\Sigma F \cos(F,x)]^2 + [\Sigma F \cos(F,y)]^2} &\overline{+ [\Sigma F \cos(F,z)]^2}, \end{aligned}\right\} [54]$$

deren letzte man erhält wenn man die drei andern quadrirt und addirt (GL. 42).

In diesen Gleichungen ist R wesentlich positiv zu nehmen, wie auch die Kräfte F.

Nimmt man als Axe der x die Richtung der Resultante R, — was erlaubt ist, da das System der drei rechtwinkeligen Axen willkürlich gelassen wurde, — so hat man

$$\left.\begin{aligned} R &= \Sigma F \cos(F,R), \\ \Sigma F \cos(F,y) &= 0 \\ \Sigma F \cos(F,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [55]$$

d. h. die Intensität der Resultante für mehrere auf einen Punct wirkende Kräfte ist gleich der algebraischen Summe aus den Projectionen der Composanten auf die Richtung der Resultante; und die algebraische Summe aus den Projectionen dieser Composanten auf eine zur Resultante senkrechte Axe ist null.

205. Die Resultante dreier Kräfte, welche nicht in einerlei Ebene liegen, ist die Diagonale des Parallelepipeds über den drei Composanten. Hieraus ergibt sich die Zerlegung einer Kraft in drei andere von gegebenen Richtungen.

206. Sind die drei Kräfte F′, F″, F‴ zu einander senkrecht, so hat man, als besondern Fall der Formeln [54]:

$$F' = R \cos (R, F'), \qquad F'' = R \cos (R, F''), \qquad F''' = R \cos (R, F''');$$

$$F'^2 + F''^2 + F'''^2 = R^2;$$

woraus man R und ihre Winkel gegen die drei Composanten findet.

207. Ist R die Resultante zweier Kräfte F′, F″, so gibt das Dreieck ABM (Fig. 20), dessen Seiten den drei Kräften proportional und in gleichem Sinne parallel mit ihnen sind, die Gleichungen (GL., 67)

$$R^2 = F'^2 + F''^2 + 2F'F'' \cos (F', F'');$$

$$\frac{F'}{\sin (R, F'')} = \frac{F''}{\sin (R, F')} = \frac{R}{\sin (F', F'')},$$

indem der Winkel ABM das Supplement des Winkels zwischen den Kräften F′, F″ ist und mithin den nämlichen Sinus wie dieser hat, während die Cosinus beider Winkel einerlei absoluten Werth aber entgegengesetzte Zeichen haben.

Sind die beiden Composanten einander gleich, und es bezeichnet F ihre Intensität, α ihren Winkel, so hat man, nach der ersten der Formeln [55]:

$$R = 2F \cos \tfrac{1}{2} \alpha.$$

Ueberhaupt kann man sich in Betreff dreier Kräfte F′, F″, R und ihrer Winkel alle Fragen der Trigonometrie aufwerfen, und dieselben durch Construction oder Rechnung lösen.

§. 2. Bewegung eines Puncts unter dem Einflusse irgend einer oder mehrerer Kräfte. — Projection dieser Bewegung auf eine Axe.

208. Wirken constante Kräfte in verschiedenen Richtungen auf einen von der Ruhe ausgehenden materiellen Punct, und begleiten sie ihn während seiner Bewegung so, daß jede ihre Intensität unverändert erhält und ihrer ersten Richtung parallel bleibt, so wird die Bewegung, wie man so eben gesehen hat, geradlinig, und läßt sich leicht bestimmen wenn man die Resultante den Composanten substituirt.

Hat aber der bewegliche Punct schon vorher eine gewisse Geschwindigkeit erlangt, deren Richtung nicht mit der Richtung der Resultante in einerlei Gerade fällt, so ist die Bewegung krummlinig, und ihre Bestimmung beruht, wie wir zeigen werden, auf dem in Nr. 132 ausgesprochenen Erfahrungsgrundsatze, vermittelst dessen wir bereits (133) festgestellt haben, daß bei geradliniger Bewegung, unter der Einwirkung von Kräften welche dieselbe

Richtung haben wie die schon vorhandene Geschwindigkeit, die Beschleunigung von dieser Geschwindigkeit unabhängig ist, und constant bleibt wenn die algebraische Summe der Kräfte sich nicht ändert.

Wir wollen hier zuerst den Fall betrachten wo die Kräfte constant sind nach Intensität und Richtung, d. h. so daß sie in paralleler Verschiebung mit dem von ihnen angegriffenen Puncte fortschreiten, wie es z. B. mit der Wirkung der Schwere auf einen schräg geworfenen Körper der Fall ist.

Es sei (Fig. 21)

R die Resultante der in Thätigkeit begriffenen Kräfte;

A die Anfangslage des Beweglichen;

AX die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0, erzeugt durch vorausgegangene Wirkung irgendwelcher Kräfte;

AY die Richtung der Resultante R der noch thätigen Kräfte;

AB = X der Weg, den das Bewegliche in der Zeit t durchlaufen würde wenn die Geschwindigkeit v_0 allein vorhanden wäre; so daß man hat

$$X = v_0 t;$$

AC = Y der Weg, den das Bewegliche in der nämlichen Zeit zurücklegen würde wenn die Anfangsgeschwindigkeit v_0 gar nicht vorhanden wäre; woraus folgt (153)

$$Y = \frac{1}{2}\frac{R}{m}t^2.$$

Denkt man sich eine bewegliche mit der Geschwindigkeit v_0 begabte Hülle, und betrachtet die Gerade AC als eine Reihe geometrischer Puncte welche mit dieser Hülle zusammenhängen, so wird diese Gerade zu Ende der Zeit t sich nach BM (gleich und parallel mit AC) versetzt finden. Nun muß aber während dieser Zeit t der fragliche materielle Punct, vermöge seiner relativen Geschwindigkeit, nach und nach die nämlichen geometrischen Puncte durchlaufen; daher befindet er sich zuletzt in M. Man schließt hieraus:

1) daß der Punct M die Ebene nicht verläßt welche durch die anfänglichen Richtungen der Geschwindigkeit und der Kraft bestimmt wird;

2) daß seine Coordinaten bezüglich dieser Richtungen AX, AY durch $X = v_0 t$ und $Y = \frac{1}{2}\frac{R}{m}t^2$ angegeben sind; woraus durch Elimination von t folgt:

$$Y = \frac{R}{2mv_0^2} \cdot X^2,$$

und dieß ist die Gleichung der vom Beweglichen durchlaufenen Curve in Beziehung auf die Axen AX, AY. Diese Curve ist eine Parabel, welche die Richtung AX der Anfangsgeschwindigkeit berührt, und deren Hauptaxe

parallel zur Richtung AY der constanten Kraft R liegt (Gl. 124). Sie ist leicht zu construiren.

Man sieht, daß man sich hüten muß zu glauben, der bewegliche Atom beschreibe die Diagonale des Parallelogramms ABMC, wie wenn die Geschwindigkeit v_0 eine constante Kraft wäre welche zu gleicher Zeit mit denjenigen Kräften wirkt deren Resultante R ist. Man darf hier nicht mehr sagen, die Bewegung des materiellen Puncts von A nach M erfolge durch eine Resultante aus der wirklichen Kraft R und der früher dagewesenen Kraft welche die Geschwindigkeit v_0 hinterlassen hat; denn nur dann kann man mehrere Kräfte zur Erzielung einer Resultante zusammenfassen oder zusammensetzen, wenn diese Kräfte gleichzeitig wirken.

209. Die Axen AX, AY sind uns auf natürliche Weise dargeboten worden durch die Richtungen der Anfangsgeschwindigkeit und der Resultante. Oft aber ist es von Vortheil, die Bewegung eines Puncts auf ganz beliebige Coordinatenaxen zu beziehen.

Es sei deßhalb Ox (Fig. 21) eine willkürlich im Raume angenommene Axe, auf welche die successiven Lagen des beweglichen Puncts projicirt werden sollen, wobei man die projicirenden Linien MP parallel zu einer beliebig gewählten Ebene yOz nimmt. Während nun der Punct im Raume die Curve AM beschreibt, suchen wir das Gesetz für die Bewegung der Projection, welche sich im anfänglichen Augenblick in P_0 befindet, zu Ende der Zeit t aber in P.

Bezeichnet

x die veränderliche Abscisse OP,

x_0 ihren Anfangswerth OP_0,

v_{0x} die Projection der Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf die Axe der x,

R_x die Projection der Kraft R auf dieselbe Axe;

und beachtet man

1) daß P_0P die algebraische Summe der Projectionen von AB und von BM oder AC ist;

2) daß man (da $AB = v_0t$) die Projection von AB erhalten kann wenn man die Projection v_{0x} von v_0 mit der Zahl t multiplicirt;

3) daß (wegen $AC = R \cdot \frac{1}{2}\frac{t^2}{m}$) die Projection von AC sich ergibt durch Multiplication der Projection R_x von R mit $\frac{1}{2}\frac{t^2}{m}$, indem AC und R einerlei Richtung haben und also ihren Projectionen proportional sind;

4) daß $R_x = \Sigma F_x$,

so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{R_x}{m}\cdot t^2, \\ \text{oder}\quad x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}\frac{\Sigma F_x}{m} t^2, \end{aligned}\right\} [56]$$

in welcher Gleichung die Größen x, x_0, v_{0x}, R_x, F_x algebraisch genommen werden müssen, d. h. mit ihren zugehörigen Vorzeichen.

Hält man diese Gleichung neben die letzte Gleichung der Nr. 153, mit welcher sie eine augenfällige Aehnlichkeit hat, so gelangt man zu folgendem sehr merkwürdigen Satze.

Lehrsatz. Bewegt sich im Raume ein materieller Punct von der Masse m vermöge einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und unter dem Einflusse verschiedener constanter Kräfte F, und man projicirt ihn in jedem Augenblicke auf eine und dieselbe beliebig gewählte Axe, so bewegt sich seine Projection auf dieser Axe wie ein Punct von der nämlichen Masse m, welchem als Anfangsgeschwindigkeit die Projection der Geschwindigkeit v_0 zukommt, und als angreifende Kraft die algebraische Summe aus den Projectionen der Kräfte F oder die Projection der Resultante aus diesen Kräften.

210. Man kann leicht nachweisen, daß obiger Lehrsatz auch dann noch gilt, wenn die Kräfte nach Intensität oder Richtung veränderlich sind; und es ist von Wichtigkeit, sich dieß vollkommen klar zu machen. Man denke sich nämlich die Zeit in unendlich kleine Intervalle zerlegt, so daß während eines solchen die sämmtlichen Kräfte als constant angesehen werden dürfen; die beschriebene Curve gleicht dann einer Folge von unendlich kleinen parabolischen Bögen, von denen je zwei benachbarte sich berühren müssen, aber in verschiedenen Ebenen liegen können; und während solch ein kleiner Bogen durchlaufen wird, bewegt sich die Projection des materiellen Punctes auf einer Axe nach dem oben ausgesprochenen Gesetze.

211. Durch den so erweiterten Lehrsatz der Nummer 209 kann man die für geradlinige Bewegung aufgestellten Sätze auf krummlinige Bewegung anwenden, indem man den Geschwindigkeiten v_0 und v, so wie den wirkenden Kräften F, ihre Projectionen auf irgend eine Axe substituirt.

Auf diese Weise liefert

1) die Grundformel der Beschleunigung (154) jetzt

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\Sigma F_x}{m} \quad \text{oder} \quad m dv_x = R_x \, dt \quad \text{oder} \quad m \, . \, d \frac{dx}{dt} = \Sigma F_x \, . \, dt,$$

und hierin liegt der **Lehrsatz:** Die Beschleunigung für die Bewegung der Projection auf einer Axe ist gleich der algebraischen Summe aus den Projectionen der Kräfte auf diese Axe, dividirt durch die Masse des Beweglichen.

2) Die Formel für die Größe der Bewegung oder für den Effect des Antriebs (159 u. 160) gibt

$$mv_x - mv_{0x} = \int R_x dt$$

oder

$$mv_x - mv_{0x} = \Sigma \int F_x dt.$$

[57]

3) Aus der Formel für den Effect der Arbeit (166 u. 167) wird

$$\tfrac{1}{2} mv_x^2 - \tfrac{1}{2} mv_{0x}^2 = \int R_x dx,$$

$$\tfrac{1}{2} mv_x^2 - \tfrac{1}{2} mv_{0x}^2 = \Sigma \int F_x dx.$$

[58]

212. Die zweite der Gleichungen [57] übersetzt sich in folgenden Satz, von welchem der in Nr. 160 nur ein besonderer Fall ist.

Lehrsatz. Bewegt sich ein materieller Punct auf irgend eine Weise im Raum, so ist der Zuwachs seiner Bewegungsgröße, projicirt auf eine beliebige Axe, gleich der algebraischen Summe aus den Antrieben der Kräfte, projicirt auf die nämliche Axe und berechnet für die nämliche Zeit.

Auf ähnliche Art lassen sich auch die Gleichungen [58] in die gewöhnliche Sprache übersetzen.

§. 3. Die Bewegung eines Punctes unabhängig von der Krümmung seiner Bahn betrachtet. — Effect der Arbeit beliebiger Kräfte. — Effect der Tangentialkraft.

213. Wir setzen zuerst voraus, eine Curve werde von einem materiellen Punct unter dem Einflusse einer Resultante R beschrieben, deren Richtung constant ist, d. h. so daß diese Kraft parallel zu sich selbst mit dem Angriffspuncte fortrückt, während ihre Intensität nach Belieben entweder constant oder veränderlich angenommen werden kann.

Nimmt man die Axe der x in der Richtung von R und wendet auf diesen Fall die Gleichung [58] der Nr. 211 an, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} mv_x^2 - \tfrac{1}{2} mv_{0x}^2 = \int R\, dx.$$

Für zwei andere Axen, rechtwinkelig unter sich und mit der ersten, gibt die nämliche Formel (mit Rücksicht darauf daß die Projectionen R_y und R_z hier null sind):

$$\frac{1}{2} mv_y^2 - \frac{1}{2} mv_{0y}^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} mv_z^2 - \frac{1}{2} mv_{0z}^2 = 0.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, wobei man zu bemerken hat, daß (30)

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2, \qquad v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2,$$

und ersetzt man dx durch ds . cos (ds, x) oder ds . cos (R, ds), so folgt

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int R ds \cos (R, ds).$$

Nach der Definition in Nro. 74 sagt diese Gleichung:

Der Zuwachs an lebendiger Potenz des materiellen Puncts während einer gewissen Zeit ist gleich der ganzen Arbeit der Resultante der Kräfte welche während dieser Zeit auf ihn wirken.

214. Dieser Satz beruht auf der Voraussetzung einer constanten Richtung der Kraft R. In dem Falle, wo diese Richtung veränderlich ist, kann man sie während kleiner Zeiträume τ_1, τ_2, ... als constant betrachten. Für jeden solchen Zeitraum hat man dann eine Gleichung von der Art wie die letzte der vorhergehenden Nummer. Bezeichnet man demnach die aufeinanderfolgenden Arbeiten von R durch $\mathfrak{T}_1 R$, $\mathfrak{T}_2 R$, ... so hat man

für die Zeit τ_1: $\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{T}_1 R,$

für die Zeit τ_2: $\frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 = \mathfrak{T}_2 R,$

. . . .

für den letzten Zeitraum τ_n: $\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_{n-1}^2 = \mathfrak{T}_n R.$

Addirt man, und bemerkt daß die Summe der rechten Seiten die Gesammtarbeit der veränderlichen Resultante R ist, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathfrak{T} R, \\ \text{oder} \quad &\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int R ds \cos (R, ds). \end{aligned}\right\} \quad [59]$$

Diese Gleichung drückt wieder den Satz der vorigen Nummer aus, aber jetzt ohne irgend eine Voraussetzung über die Richtung der Kräfte.

215. Sind F′, F″, F‴, ... durchaus beliebige Kräfte welche auf einen materiellen Punct wirken, so hat man nach der allgemeinen Eigenschaft der Resultante (202), und analog mit den Formeln in Nr. 204:

$$R \cos(R, ds) = F' \cos(F', ds) + F'' \cos(F'', ds) + F''' \cos(F''', ds) + \dots$$

Wird, nach Multiplication durch ds, integrirt, so folgt

$$\int R ds \cos(R, ds) = \int F' ds \cos(F', ds) + \int F'' ds \cos(F'', ds) + \int F''' ds \cos(F''', ds) + \dots \qquad [60]$$

d. h. die Arbeit der Resultante mehrerer Kräfte ist gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten dieser Kräfte.

216. Der in Nr. 213 und 214 bewiesene Satz, von welchem der Satz in Nr. 168 nur ein besonderer Fall ist, kann nun so ausgesprochen werden:

Lehrsatz. Der Zuwachs an lebendiger Potenz eines von beliebigen Kräften ergriffenen Atoms ist gleich der algebraischen Summe aus den Arbeiten aller dieser Kräfte innerhalb der nämlichen Zeitgrenzen

Wir nennen diesen Satz den **Lehrsatz vom Effect der Gesammt-Arbeit** der Kräfte welche auf einen materiellen Punct wirken.

Seine abgekürzte Darstellung ist

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F. \qquad [61]$$

217. An die Gleichung [59] zu Ende der Nr. 214

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \int R \cos(R, ds) \,.\, ds$$

knüpft sich noch Folgendes an.

Das Product R cos (R, ds) ist für jeden bestimmten Augenblick die Projection der Resultante oder die Summe aus den orthogonalen Projectionen der Composanten F′, F″, F‴, ... auf die Tangente, welche in diesem Augenblicke die Richtung der Bewegung anzeigt, und heißt deshalb die gesammte Tangentialkraft im genannten Augenblicke.

Bezeichnen wir diese Kraft, welche positiv oder negativ, constant oder veränderlich sein kann, durch ψ, so erhält die Gleichung [59] die Form

$$\tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \int \psi \, ds,$$

und in Verbindung mit der Gleichung [28] in Nr. 166 liefert sie den nachstehenden wichtigen Satz.

Lehrsatz. Ein von beliebigen Kräften angegriffener materieller Punct hat auf der von ihm durchlaufenen Curve dieselbe Bewegung, wie wenn er auf einer Geraden bliebe, und in jedem Augenblick nach der Richtung dieser Geraden von einer Kraft angegriffen wäre welche der gesammten Tangentialkraft gleich ist.

Mit andern Worten: Die Geschwindigkeit, und mithin auch die Beschleunigung und die durchlaufenen Räume, hängen blos von der tangentiellen Gesammtkraft ab, während — wie sich bald zeigen wird — die normale Composante, zusammengesetzt mit der erlangten Geschwindigkeit, die Krümmung der beschriebenen Linie bestimmt.

218. Zusatz I. Ist die Tangentialkraft constant, so ist die krummlinige Bewegung eine gleichförmig veränderliche, und die Gleichungen [24] in Nr. 153

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}, \qquad mv - mv_0 = Ft, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

bestehen fort für diese krummlinige Bewegung, wenn man nur die x längs der Curve mißt und unter F die Tangentialkraft ψ oder R cos (R, ds) versteht.

Bezeichnet man daher durch s die Bögen, welche auf dieser Curve von einem beliebigen Ursprunge aus bis an die successiven Lagen des Beweglichen reichen, so hat man

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R\cos(R, ds)}{m},$$

$$mv - mv_0 = R\cos(R, ds).t,$$

und

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{R\cos(R, ds)}{m}t^2.$$

219. Zusatz II. Die Tangentialkraft mag constant bleiben oder veränderlich sein, so besteht die auf geradlinige Bewegung bezügliche Gleichung [26] der Nr. 159, $mv - mv_0 = \int F dt$, noch für die krummlinige Bewegung fort, sobald man statt F die Tangentialkraft einsetzt. Sie erhält dann die Form

$$mv - mv_0 = \int R\cos(R, ds) . dt \qquad [62]$$

und kann so ausgesprochen werden: Der Zuwachs der Bewegungsgröße für einen materiellen Punct ist gleich dem ganzen Antriebe der gesammten Tangentialkraft in der nämlichen Zeit.

220. **Zusatz** III. Die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{R \cos (R, ds)}{m}, \quad [63]$$

hergeleitet aus der Gleichung in Nr. 154 durch Einsetzung der Tangentialkraft an die Stelle von F, gilt für alle Fälle von krummliniger Bewegung, und sagt: die Beschleunigung der Bewegung eines materiellen Puncts ist gleich der gesammten Tangentialkraft dividirt durch die Masse des Puncts.

In dieser Gleichung [63] liegen, obwohl noch unentwickelt, zwei frühere eingeschlossen; nämlich 1) die Gleichung [62] der Nr. 219, welche sich aus ihr ergibt wenn man mit mdt beiderseits multiplicirt und integrirt; 2) die Gleichung [59] der Nr. 214, zu deren Erlangung man mit mds multipliciren, dann v für $\frac{ds}{dt}$ substituiren und endlich integriren müßte.

§. 4. Wurf eines schweren Punctes im leeren Raum.

221. Eine der einfachsten Anwendungen, die man von den Sätzen der beiden vorausgegangenen Paragraphen machen kann, besteht in der Untersuchung, wie sich ein schwerer materieller Punct im Raume mit einer Anfangsgeschwindigkeit von beliebiger Richtung bewegt.

1) Nimmt man die Axe AX (Fig. 22) längs der Anfangsgeschwindigkeit V, und die Axe AY vertical, nach der Richtung in welcher die Kraft mg, d. h. das Gewicht des betrachteten Körpers (150), wirkt, so findet man durch unmittelbare Anwendung dessen was in Nr. 208 vorkam:

$$X = V_0 t; \qquad Y = g\,\frac{t^2}{2}; \qquad Y = \frac{g}{2V_0^2}\,.\,X^2.$$

Dadurch ist man in den Stand gesetzt, die Parabel punctweise zu construiren und die Lage des beweglichen Puncts für jeden Augenblick anzugeben.

In dem Falle, wo die Geschwindigkeit V horizontal ist, liegt der Scheitel der Parabel im Ausgangspuncte A.

2) Nimmt man zwei rechtwinkelige Axen an, Ax horizontal, Ay vertical von unten nach oben — wobei vorausgesetzt ist, daß die Anfangsgeschwindigkeit sich um den Winkel α über den Horizont erhebe — so gibt der Lehrsatz in Nr. 209:

$$x = V \cos \alpha\,.\,t, \qquad y = V \sin \alpha\,.\,t - \tfrac{1}{2}\,gt^2,$$

woraus durch Elimination von t die Gleichung der Curve oder Wurflinie folgt, nämlich:

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2V^2 \cos^2 \alpha}\,.\,x^2. \quad [64]$$

Die Coordinaten x_1, y_1 des höchsten Punctes M_1 ergeben sich (Gl. 255) aus

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{oder} \qquad tg\,\alpha - \frac{g}{V^2 \cos^2 \alpha}\, x_1 = 0;$$

man erhält zunächst

$$x_1 = \frac{V^2}{g} \,.\, \sin \alpha \cos \alpha,$$

und dann, durch Substitution in [64]:

$$y_1 = \frac{V^2}{2g} \,.\, \sin^2 \alpha. \qquad [65]$$

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man durch Anwendung des Lehrsatzes in Nr. 209, nach welchem die Projection des materiellen Puncts auf der Axe Oy sich bewegt wie ein mit der Geschwindigkeit $V \sin \alpha$ vertical aufgeworfener Punct, und folglich die dieser Geschwindigkeit entsprechende Höhe $y = \frac{V^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ in der Zeit $\frac{V \sin \alpha}{g}$ erreicht; durch Substitution dieses letztern Werthes für t in der Gleichung $x = V \cos \alpha \,.\, t$ erhält man dann, wie oben

$$x_1 = \frac{V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2}{2g} \sin 2\alpha. \qquad [66]$$

Die durch den Ausgangspunct gelegte Horizontale Ax wird von der beschriebenen Curve wieder in P_2 geschnitten; die Distanz AP_2 heißt die **horizontale Wurfweite** und ist der zu $y = 0$ gehörige Werth von x. Die zweite Gleichung liefert dann $t = \frac{2V \sin \alpha}{g}$, und dieß ist die doppelte Zeit des Aufsteigens von A nach M_1; nach Substitution dieses Werthes in $x = V \cos \alpha \,.\, t$ erhält man

$$AP_2 = x_2 = \frac{2V^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{V^2}{g} \sin 2\alpha = 2x_1.$$

Das Maximum, welches die horizontale Weite erreichen kann wenn man unter Beibehaltung der Anfangsgeschwindigkeit V den Winkel α ändert, entspricht dem Maximum von $\sin \alpha \cos \alpha$ oder von $\sin 2\alpha$; dieses findet statt bei $2\alpha = 90^0$, und man hat dann $x_2 = \frac{V^2}{g}$; d. h. die größte horizontale Weite ist doppelt so groß als die der Anfangsgeschwindigkeit entsprechende Höhe (145), und wird erlangt wenn diese Geschwindigkeit einen Winkel von 45^0 mit dem Horizonte (aufwärts) bildet.

222. Die Geschwindigkeit in einem Puncte, dessen Ordinate y ist, erhält man unmittelbar durch den Lehrsatz vom Effect der Arbeit (216). Da nämlich

(139) die Wirkung der Schwere auf einen materiellen Punct eine constante Kraft ist, und (in den gewöhnlichen Fällen mit denen man zu thun hat) einer und derselben Richtung parallel bleibt, so folgt aus der Bemerkung in Nr. 78, daß die Arbeit dieser Kraft zwischen irgend zwei Lagen des Beweglichen gleich ist dem Producte aus ihrer Intensität, d. i. aus dem Gewichte des Körpers, und der Höhe um welche er unter eine durch die Anfangslage gehende horizontale Ebene herabgekommen ist. Wenn die Endlage sich über dieser Ebene befindet, ist die Arbeit negativ.

Demnach hat man in der Gleichung $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mV^2 = \mathfrak{T}F$ rechts $-mgy$ für $\mathfrak{T}F$ zu setzen, und erhält

$$v^2 = V^2 - 2gy.$$

Das Nämliche hätte sich ohne Benützung des Lehrsatzes vom Effect der Arbeit ergeben, wenn die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten der Projectionen auf beiden Axen (209), nämlich $v_x = V\cos\alpha$, $v_y = V\sin\alpha - gt$, hergestellt und dann in der Formel $v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2$ (31) substituirt worden wären.

223. Die Curve sei durch Beobachtung gegeben; man verlangt die Anfangsgeschwindigkeit V.

Kann man die Weite $2x_1$ und den Winkel α messen, so hat man, nach [66],

$$V^2 = 2x_1 g \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha}.$$

Kennt man statt der Weite die Erhebung y_1, so ist, nach [65],

$$V^2 = 2gy_1 \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Sind, außer dem Anfangspuncte, noch irgend zwei Puncte der Curve durch ihre Coordinaten bekannt, so läßt sich die Gleichung der Parabel anschreiben (GL., 126); die Zusammenstellung derselben mit der oben erhaltenen Gleichung [64] führt auf die Werthe von $\mathrm{tg}\alpha$ und von $V^2\cos^2\alpha$, aus denen man dann V berechnet, unter Benützung der Relation

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}.$$

224. Will man durch Rechnung den Durchschnittspunct der Wurflinie mit einer geraden oder krummen Linie finden, welche in der Ebene der Wurflinie gegeben ist, so hat man die Gleichung [64] mit der Gleichung der gegebenen Linie zu verbinden, und x, y als die Coordinaten des gemeinschaftlichen Punctes anzusehen.

Wird die Wurfweite AN (Fig. 22.) auf einer gegen den Horizont geneigten Linie AB verlangt, so kann man, um direct zu verfahren, diese Linie zur Axe der x nehmen, während die Axe der y vertical bleibt. In

diesem schiefwinkeligen Coordinatensystem hat man (209), wenn V_x und V_y die zusammengehörigen Projectionen der Anfangsgeschwindigkeit V vorstellen, die Gleichungen

$$x = V_x t, \quad y = V_y t - \tfrac{1}{2} g t^2, \quad \text{und also} \quad y = \frac{V_y}{V_x} x - \frac{g}{2V_x^2} x^2.$$

Für $y = 0$ kommt dann als die auf AB gemessene Weite

$$x = AN = \frac{2}{g} V_x V_y.$$

Wir wollen die Richtung AB sowie die Geschwindigkeit V als gegeben annehmen, und fragen, welche Richtung diese Geschwindigkeit in dem gegebenen Winkel yAB haben müsse damit die Weite AN ein Maximum wird. Bezeichnen β und β' die unbekannten Winkel XAB, XAy, deren Summe gegeben ist, so hat man (GL., 65)

$$V_x = V \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')} \quad \text{und} \quad V_y = V \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')}.$$

Man schließt hieraus, daß das Maximum von AN eintritt, wenn $\sin \beta \sin \beta'$ ein Maximum ist, folglich (GL., 259) bei $\beta = \beta'$; d. h. die gesuchte Richtung der Anfangsgeschwindigkeit theilt den Winkel yAB in zwei gleiche Theile, wie in dem besondern Falle wo AB horizontal ist (221).

§. 5. Bewegung eines Puncts auf einer gegebenen Ebene, ohne Reibung.

225. Die bisher entwickelten Principien lehren die Bewegung eines Puncts in Folge gegebener Kräfte finden, wenn seine Anfangsbewegung bekannt ist. Es gilt nun, die Bewegung eines Puncts zu untersuchen, wenn man von vornherein nur einen Theil der ihn angreifenden Kräfte kennt, die in Betreff der Kräfte mangelnden Angaben aber durch die Bedingungen ersetzt sind, denen die gesuchte Bewegung unterliegt.

Bewegt sich ein Punct auf einer gegebenen Fläche, so kann es in einem sehr speciellen Falle vorkommen, daß diese Fläche die Curve enthält, welche der Punct, unabhängig von der Fläche, vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit und der auf ihn wirkenden Kräfte beschreiben würde. In diesem Falle ändert die Fläche nichts an der Bewegung.

Verbleibt aber der Punct in der Art auf einer Fläche, daß die von ihm beschriebene Linie verschieden ist von derjenigen, welche er vermöge der Kräfte bei Abwesenheit der Fläche verfolgen würde, so übt die Fläche, oder vielmehr der von dieser Fläche begrenzte Körper, auf den Punct eine gewisse

Kraft aus, die man den **Widerstand** oder die **Rückwirkung** der Fläche neunt, und deren Zusammensetzung mit den übrigen Kräften die wirkliche Bewegung bedingt.

226. Es sei z. B. die Fläche, auf welcher ein materieller Punct fortgleitet, eine Ebene. Enthält diese Ebene nicht die Resultante R der Kräfte F, F′, F″, ..., welche unabhängig von der Ebene auf das Bewegliche wirken (wie etwa das Gewicht des Beweglichen, die Thätigkeit eines Motors 2c.), so muß man hieraus auf eine durch die Ebene geübte Rückwirkung R_1 von solcher Art schließen, daß deren Zusammensetzung mit der partiellen Resultante R eine definitive Resultante φ **längs der Ebene** ergibt, weil sonst der Punct die Ebene verlassen würde (208).

Dieser Schluß bietet sich manchmal unter anderer Form dar. Zerlegt man die partielle Resultante R in zwei Kräfte, eine normale (nämlich zur **Ebene** senkrechte) N und eine tangentielle (hier in der Ebene liegende) T, und läßt man eben so die Rückwirkung R_1 in eine normale Rückwirkung N_1 und eine tangentielle Rückwirkung T_1 zerfallen, so müssen nothwendig die beiden Kräfte N und N_1 gleich und entgegengesetzt sein, oder, wie man sagt, sich **aufheben**, damit die definitive Resultante φ in die Ebene falle.

Diese Gleichheit zwischen der normalen Composante der Resultante aus den unabhängigen Kräften einerseits, und der normalen Rückwirkung andrerseits, findet aber nicht mehr statt wenn die Fläche krumm ist und der Punct schon eine Geschwindigkeit erlangt hat; denn die Gesammt-Resultante φ liegt dann nicht in der Tangential-Ebene, weil die Fortbewegung nach einer krummen Linie erfolgt, welche aus dieser Ebene heraustritt.

227. In der rationellen Mechanik setzt man die Existenz von Flächen voraus, welche bei völliger Unveränderlichkeit der Form und vollkommener Glätte den auf sie drückenden Körpern keinen andern Widerstand bieten als einen normalen, so daß die tangentielle Rückwirkung null ist.

So verhält sich's aber nicht in der Natur. Vielmehr hat man, um sich die wahre Einwirkung einer festen Oberfläche auf einen über sie hinbewegten Körper vorzustellen, an diesem Körper außer dem normalen Widerstand der Fläche noch eine tangentielle Kraft in Angriff zu denken, welche **Reibung** genannt wird, und deren Richtung einen der Bewegung entgegengesetzten Sinn hat.

Die nachfolgenden Untersuchungen, bei denen von der Reibung abgesehen wird, sind daher nur als Uebungen zu betrachten. Sie sollen später mit Rücksicht auf die Reibung wieder aufgenommen werden.

228. **Bewegung eines schweren materiellen Puncts auf einer schiefen Ebene, ohne Reibung.**

Der Körper wird in Wirklichkeit von zwei Kräften angegriffen; die eine

hat verticale Richtung und ist dem Gewichte p des Körpers gleich; die andere ist die normale Rückwirkung N_1 der Ebene. Die Resultante aus diesen Kräften liegt in der schiefen Ebene, aber auch in der Ebene der beiden Composanten, welche vertical und zugleich zur schiefen Ebene senkrecht ist; woraus folgt, daß die Resultante ihre Richtung längs der Linie des größten Abhangs hat. Ihre Intensität φ ist (204) p sin i (wenn i die Neigung der Ebene gegen den Horizont bezeichnet), oder $\frac{ph}{l}$ (Fig. 23). Zu dem nämlichen Ergebniß kommt man (jedoch mit minderer Klarheit der Vorstellung und geringerer Schärfe des Ausdrucks), wenn man sagt, das als verticale Kraft wirkende Gewicht p zerlege sich in eine zur Ebene senkrechte und eine zur Ebene parallele Composante, von denen die erstere durch den Widerstand der Ebene aufgehoben werde, weßhalb die zweite die eigentlich wirksame Kraft sei.

Ist der Körper von der Ruhe ausgegangen, so geben die Gleichungen der Bewegung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\varphi}{m} = g \sin i, \qquad x = \tfrac{1}{2} g \sin i \,.\, t^2,$$

$$v = g \sin i \,.\, t, \qquad v^2 = 2gx \sin i.$$

Unter der Annahme, der Körper habe bereits die Längenstrecke l durchlaufen und sei um die Höhe h herabgekommen, kann man nach der erlangten Geschwindigkeit fragen, und nach der Zeit seines Herabsinkens.

1) Für die Geschwindigkeit gibt die vierte der obigen Gleichungen

$$v = \sqrt{2g\,l \sin i} = \sqrt{2gh},$$

was man auch unmittelbar finden würde durch Betrachtung der Arbeit der Kraft p; denn die Arbeit des Widerstands der Ebene ist null, da diese Kraft senkrecht auf dem beschriebenen Wege steht.

2) Die Zeit des Herabsinkens ist nach der zweiten der obigen Gleichungen

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin i}} = \sqrt{\frac{2l^2}{gh}} = l\sqrt{\frac{2}{gh}}.$$

Wenn also zwei Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit von einem und dem nämlichen Punct ausgehen und auf zwei beliebigen schiefen Ebenen sich fortbewegen, so werden sie in einer und derselben Horizontalebene mit gleichen Geschwindigkeiten ankommen, aber nach verschiedenen Zeiten, welche den durchlaufenen Strecken proportional sind.

229. Würden für verschiedene geneigte Ebenen die Größen l und h der Bedingung $\frac{l^2}{h} = \text{const.}$ genügen, so wäre die Zeit des Herabsinkens immer die nämliche. Dieß wird erreicht, wenn die Ebenen dieselben Längen und

dieselben Neigungen haben wie die Sehnen eines und desselben Kreises, welche vom Anfangs- oder Endpuncte des verticalen Durchmessers ausgehen (Fig. 24). Ist r der Halbmesser dieses Kreises, so hat man

$$l^2 = 2rh \quad \text{und} \quad t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

230. Aufgabe. Es ist ein Punct A und eine Ebene BC gegeben. Man soll die schiefe Ebene AP bestimmen, auf welcher ein schwerer Körper, der von A ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht, die Ebene BC in der kürzesten Zeit erreicht (Fig. 25).

Denkt man sich eine durch A gehende Kugelfläche, welche ihren Mittelpunct O auf der Verticalen AB hat und die Ebene BC berührt, so gibt die Verbindungslinie AP zwischen dem Berührungspuncte P und dem gegebenen Puncte A den Abhang und die Länge der gesuchten Ebene an; denn jede andere Gerade AQ würde, da sie länger ist als die auf sie fallende Sehne MA, mehr Zeit für ihre Zurücklegung erfordern.

Die gesuchte Linie AP halbirt, wie man leicht sieht, den Winkel BAD der Verticalen AB gegen die zur Ebene Senkrechte AD.

231. Es wirke auf das an eine schiefe Ebene sich anlehnende Bewegliche außer seinem Gewichte p noch eine Kraft Q, deren Richtung in einer zur schiefen Ebene senkrechten Verticalebene liegt (Fig. 26). Da die Resultante aus den Kräften p, Q und der Rückwirkung der Ebene parallel zu der Ebene ist auf welcher die Bewegung vor sich geht, so ist (204) der Werth dieser Kraft, als deren positiver Sinn der des Heraussinkens gelten soll,

$$F = p \sin \alpha - Q \cos \beta.$$

Ist Q parallel zur Ebene, so hat man $F = p \sin \alpha \pm Q$;

und wenn Q horizontal ist: $F = p \sin \alpha \pm Q \cos \alpha$.

Ist keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so wird der Körper herabsinken oder aufsteigen, jenachdem der ausgerechnete Werth der Kraft F positiv oder negativ ausfällt. Gleichgewicht tritt ein wenn dieser Werth null ist.*)

§. 6. Centripetalkraft bei kreisförmiger, und allgemein bei krummliniger Bewegung.

232. Kreisbewegung. — Durchläuft ein materieller Punct mit gleichförmiger oder veränderlicher Bewegung den Umfang eines Kreises oder

*) Es wird sich später zeigen, daß die in Nr. 228—231 angegebenen Auflösungen, der Reibung wegen, in der Praxis nicht brauchbar sind, und daß sie selbst dann nicht passen (wie man etwa glauben könnte), wenn eine kleine homogene Kugel über eine schiefe Ebene rollt.

blos einen Bogen desselben, so schließt man hieraus (unter allen Umständen welche bei einer solchen Kreisbewegung vorkommen können):

1) daß der materielle Punct fortwährend von einer oder von mehreren Kräften angegriffen ist, unabhängig von denjenigen Kräften deren vorhergegangene Wirksamkeit ihm seine gegenwärtige Geschwindigkeit verschafft hat; denn außerdem würde er sich in gerader Linie bewegen (128);

2) daß die Resultante der noch wirkenden Kräfte immer in der Ebene des Kreises liegt (208).

Zerlegt man in einem beliebigen Augenblicke diese Resultante in zwei Kräfte, eine tangentielle ψ und eine normale χ, so ist die erste gleich dem Product aus der Beschleunigung im betrachteten Augenblicke und der Masse des Beweglichen, wie wenn die Bewegung geradlinig wäre (220), also $\psi = m\frac{dv}{dt}$. Die normale Kraft χ wirkt in centralem Sinne, d. h. vom Umfang gegen den Mittelpunct hin (208), weshalb man ihr den Namen Centripetalkraft gegeben hat.

233. Aufgabe. Die Intensität χ der Centripetalkraft auszudrücken als Function der Masse m des Beweglichen, seiner Geschwindigkeit v und des Kreishalbmessers r.

Der materielle Punct befinde sich in einem bestimmten Augenblicke in M (Fig. 27), nach einem sehr kleinen Zeitraum τ aber in M'. Für die bewegliche Projection des Puncts auf dem Halbmesser MO wenden wir den Lehrsatz der Nr. 209 an. Diese Projection beschreibt in der Zeit τ den Raum MP, und bei dieser Bewegung ist die Anfangsgeschwindigkeit null, weil in dem Augenblicke, wo der materielle Punct durch M geht, die Geschwindigkeit v mit der Axe MO einen rechten Winkel bildet. Im nämlichen Anfangsaugenblick ist die Projection der Kraft χ auf MO diese Kraft selbst, während die Projection von ψ null ist.

Auf dem Wege von M zu dem sehr nahe gelegenen Puncte M' wird die Intensität der normalen Kraft sich sehr wenig ändern, und ihre Projection auf MO weicht von χ um so wenig ab als man nur will, wenn der Bogen MM' klein genug genommen wird. Zugleich bleibt die Projection der Tangentialkraft ψ auf MO beliebig nahe an null. Mit einem relativen Fehler, der sich durch Verkleinerung von MM' fortwährend verringern läßt, kann man daher MP dem Raume gleichsetzen, welchen ein Bewegliches von der Masse m unter stetiger Einwirkung der Kraft χ zurücklegen würde; d. h. man kann, wenn das Segment MP mit x bezeichnet wird, die Gleichung anschreiben

$$x = \frac{1}{2}\frac{\chi}{m}\tau^2. \qquad [67]$$

Wir nannten den dabei unterlaufenden Fehler einen relativen, womit angedeutet sein soll, daß die Größe, um welche die rechte Seite der Gleichung unrichtig blieb, nicht blos sehr klein gegen die Längeneinheit ist, sondern ein sehr kleiner Bruchtheil des für x angesetzten Werthes $\frac{1}{2}\frac{\chi}{m}\tau^2$. Hieraus ergibt sich eine wichtige Folgerung. Die Gleichung [67] nämlich, welche streng genommen ungenau oder unvollständig ist solange x und τ endliche oder wirklich vorhandene Größen vorstellen, wird in aller Strenge genau, wenn man das Verhältniß $\frac{x}{\tau^2}$ der beiden auf die zwei Seiten der Gleichung vertheilten sehr kleinen Größen mit der Grenze vertauscht, welcher sich dasselbe bei gleichzeitigem Abnehmen von x und τ^2 unbestimmt, d. h. so weit man nur will, nähert. Um dieß kurz auszudrücken sagt man, die Gleichung [67] werde vollkommen genau sobald x und τ unendlich klein sind.

Es sei s der kleine Bogen MM'; dann ist $\frac{s}{\tau}$ die mittlere Geschwindigkeit für die Strecke dieses Bogens; und bei fortgesetzter Abnahme desselben hat man, mit einem an der Grenze verschwindenden Fehler, $\frac{s}{\tau} = v$; woraus für die Substitution in [67] folgen würde

$$\tau^2 = \frac{s^2}{v^2}. \qquad [68]$$

Endlich gilt noch, nachdem der Bogen s so klein geworden ist daß er mit seiner Sehne zusammenfällt, in beliebig weit zu treibender Annäherung die Relation

$$s^2 = 2rx. \qquad [69]$$

Eliminirt man x, τ und s durch Multiplication zwischen den Gleichungen [67], [68] und [69], so kommt

$$1 = \frac{\chi r}{mv^2}, \qquad \text{und also} \qquad \chi = \frac{mv^2}{r}.\text{*)} \qquad [70]$$

234. Wenn die Tangentialkraft null ist, so ist die Geschwindigkeit constant; und umgekehrt (217 u. 128). In diesem Falle ist auch die Centripetalkraft constant.

*) Von der völligen Genauigkeit dieser Formel wird man sich bei folgendem kurzen Ueberblick ihrer Herleitung überzeugen. Zunächst bemerke man, daß bei unendlichem Abnehmen der Zeit τ zugleich auch die von τ abhängigen Größen s und x sich ohne Ende vermindern. Statt der Näherungsgleichungen [67], [68], [69] kann man dann die strengen Gleichungen

$$\frac{1}{2}\frac{\chi}{m} = \lim \frac{x}{\tau^2}, \qquad v = \lim \frac{s}{\tau}, \qquad 2r = \lim \frac{s^2}{x}$$

anschreiben; und wenn man die erste mit der dritten multiplicirt, so erhält man in aller Strenge

$$\frac{\chi r}{m} = \lim \left(\frac{x}{\tau^2}\cdot\frac{s^2}{x}\right) = \lim \frac{s^2}{\tau^2} = \left(\lim \frac{s}{\tau}\right)^2 = v^2.$$

235. Erstes Beispiel einer Kreisbewegung.

Man denke sich einen undehnbaren Faden, dessen Masse vernachläßigt werden könne; der eine Endpunct desselben sei fest, an den andern sei ein materieller Punct geknüpft. Wird dieser Punct in Bewegung gesetzt und dann der einzigen Kraft überlassen welche der gespannte Faden auf ihn ausübt (so daß also auch die Schwere als nicht vorhanden zu betrachten ist), so bewegt er sich gleichförmig im Kreise; $\frac{mv^2}{r}$ ist die Intensität der Kraft mit welcher der Faden auf ihn wirkt.

Hier findet sich Gelegenheit, ein Princip oder ein allgemeines Naturgesetz in Anwendung zu sehen, auf welches wir später *) ausführlicher zurückkommen werden, und dessen Ausspruch lautet: Jede Wirkung ist begleitet von einer gleichen Gegenwirkung. Diesem Princip gemäß übt der eben betrachtete Körper, welcher von dem ihn auf der Kreisperipherie haltenden Faden eine Kraftäußerung $\frac{mv^2}{r}$ empfängt, auch seinerseits auf den Faden, und mithin auf den festen Mittelpunct des Kreises, eine Kraft von der nämlichen Intensität $\frac{mv^2}{r}$, deren Richtung aber den Sinn vom Mittelpuncte nach der Peripherie hat.

Diese der Centripetalkraft gleiche und entgegengesetzte Kraft heißt Centrifugalkraft. Sie wirkt keineswegs auf den Körper welcher den Kreisumfang vom Halbmesser r beschreibt; im Gegentheil wird sie von diesem Körper auf denjenigen ausgeübt der ihn auf dem Umfange erhält.

Aehnliche Bemerkungen ließen sich hinsichtlich eines materiellen Puncts machen, welcher einen Kreis beschreibt in Folge einer erlangten Geschwindigkeit, und ohne eine nachwirkende Kraft, außer derjenigen welche daraus entspringt daß der materielle Punct sich ohne Reibung auf die hohle Seite einer gegebenen Peripherie stützt. In diesem Falle ist es die Curve, welche auf den Körper die zu seiner Kreisbewegung erforderliche Centripetalkraft übt; und der Körper übt dagegen auf die Curve die Centrifugalkraft aus.

236. Zweites Beispiel einer kreisförmigen Bewegung.

Wird der materielle Punct M von zwei gespannten Fäden MA′, MA″ (Fig. 28) gehalten, deren Endpuncte A′, A″ fest sind, und sieht man wieder ab von der Schwere, so ist die Centripetalkraft χ die Resultante der beiden Kräfte F′, F″ welche diese Fäden in den Richtungen MA′, MA″ auf das Bewegliche M ausüben. Bezeichnet r die Distanz MO des Beweglichen von der Geraden A′A″, so ist $\chi = \frac{mv^2}{r}$. Die Intensitäten von F′ und F″ sind

*) Dritter Abschnitt, Kap. I.

leicht als Functionen der in der Figur vorkommenden Winkel zu bestimmen; denn man hat (207)

$$\frac{F'}{\sin A''MO} = \frac{\chi}{\sin A'MA''}, \quad \text{und} \quad \frac{F''}{\sin A'MO} = \frac{\chi}{\sin A'MA''}.$$

Man nennt diese Intensitäten die Spannungen der Fäden.

Nach dem Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung sind die Composanten von χ, nämlich die Kräfte F' und F'', beziehungsweise gleich und entgegengesetzt denen, welche von dem materiellen Punct auf die Fäden und von den Fäden auf die festen Puncte A', A'' ausgeübt werden. Hieraus folgt, daß die Spannungen der Fäden und die durch sie auf die festen Puncte A', A'' geübten Kräfte dieselben sind wie wenn die Fäden und der Punct M in Ruhe wären und letzterer von der Centrifugalkraft χ' angegriffen würde, welche der Centripetalkraft χ gleich und entgegengesetzt ist.

Hier ist die zur Kreisbewegung des Punctes M nöthige Centripetalkraft nicht mehr unmittelbar gegeben; sie wird vielmehr durch ihre beiden Composanten F', F'' vertreten, indem nur diese Kräfte durch die Fäden auf den materiellen Punct wirklich ausgeübt werden. Umgekehrt übt der letztere auf die Fäden zwei Kräfte längs A'M und A''M aus, welche, wenn sie mit diesen Richtungen nach M verlegt würden, zur Resultante die Centrifugalkraft χ' hätten. *)

*) Diese Betrachtungen werden eine allgemeinere Ausführung finden im 3ten Kap. des III. Abschnitts. Doch dürfte es nicht unnütz sein, schon hier bemerklich zu machen, daß wir, indem wir den Begriff der Centrifugalkraft auf das Princip der gleichen Gegenwirkung gründen, einer neueren durch die Professoren der Pariser polytechnischen Schule eingeführten Lehre folgen und von der Ausdrucksweise der Schriftsteller aus dem achtzehnten Jahrhundert abweichen.

In Laplace's „Weltsystem" (Exposition du systéme du monde, liv. III, chap. 2 lies't man:

„Wir haben an der Kreisbewegung ein Beispiel von einer stetig wirkenden Kraft. „Da die Bewegung der sich selbst überlassenen Materie gleichförmig und geradlinig „vor sich geht, so ist klar, daß ein auf einer Peripherie umlaufender Körper unaufhörlich strebt, sich nach der Tangente vom Mittelpuncte zu entfernen. Die Anstrengung, welche er hiefür macht, heißt Centrifugalkraft; und jede gegen einen Mittelpunct gerichtete Kraft nennt man Centralkraft oder Centripetalkraft. Bei der Kreisbewegung ist die Centralkraft „gleich und entgegengesetzt der Centrifugalkraft, und jene strebt ohne Aufhören den „Körper von der Peripherie nach dem Mittelpuncte hin zu ziehen."

Nach diesen Worten könnte es scheinen, als müsse in naturgemäßer Aufeinanderfolge der Vorstellungen die Centrifugalkraft vor der Centripetalkraft betrachtet werden. Wir glauben das Gegentheil. Wenn der Körper, der sich auf einer Peripherie bewegt, in irgend einem Augenblicke sich selbst überlassen bliebe, so würde er im nämlichen Augenblicke nach der Tangente entfliehen und mithin vom Mittelpuncte sich entfernen, ohne dafür irgend eine Anstrengung zu machen. Um ihn auf der Peri-

237. Die Centripetal- oder Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{r}$ kann mit dem Gewichte p des Körpers in Beziehung gesetzt werden. Schreibt man $\frac{p}{g}$ für m, so gibt die Gleichung [70] die Proportion

$$\chi : p = \frac{v^2}{2g} : \frac{r}{2},$$

in welcher $\frac{v^2}{2g}$ die Höhe für die Geschwindigkeit v ist (145).

238. Die Größe $\frac{mv^2}{r}$ nimmt nach Umständen noch andere Formen an.

1) Bezeichnet T die Zeit für einen ganzen Umlauf des Beweglichen um den Mittelpunct, und ist die Bewegung gleichförmig, so hat man

$$v = \frac{2\pi r}{T}; \qquad \text{und hieraus} \qquad \chi = m \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2}. \qquad [71]$$

2) Ist ω die Geschwindigkeit des geometrischen Punctes welcher auf dem beweglichen Halbmesser OM im Abstande eines Meters vom Mittelpunct O liegt, so befriedigt diese Größe, welche die Winkelgeschwindigkeit des Beweglichen M darstellt (48), die Gleichung $v = \omega r$; daher

$$\chi = m\omega^2 r. \qquad [72]$$

239. Ausdehnung der Theorie der Centripetalkraft auf eine beliebige krummlinige Bewegung.

Ist die durchlaufene Curve kein Kreis, sondern eine ganz beliebige Linie, so kann man wenigstens einen sehr kleinen Bogen MM' derselben als in einer Ebene liegend betrachten, und diese Ebene wird zugleich die Centripetalkraft enthalten welche auf das Bewegliche im Augenblicke seines Durchgangs durch M wirkt. Man ziehe in dieser Ebene die Normalen der beiden Puncte M, M', und bezeichne die Distanz MO ihres Schnittpuncts von M durch r. Die Gleichungen [67], [68], [69] der Nr. 233 sind dann noch immer zulässig, bis auf kleine Fehler, welche um so weniger Einfluß behalten je kleiner der Bogen MM' wird. Der einzige Unterschied besteht nur darin, daß die Länge r,

---

pherie zu erhalten, ist eine auf ihn einwirkende Centripetalkraft nöthig, deren Intensität wir berechnen gelehrt haben. Ein Körper kann aber niemals eine oder mehrere Kräfte aufnehmen ohne dagegen auch seinerseits auf diejenigen Körper zu wirken durch welche ihm jene Kräfte beigebracht wurden; hieraus entspringt die Centrifugalkraft; sie ist, wenn man will, die Anstrengung oder die Resultante aus den Anstrengungen, welche der betrachtete Körper gegen die ihn auf der Peripherie erhaltenden Körper aufbietet.

statt wie in Nr. 233 ein constanter Halbmesser zu sein, jetzt einer Grenze zustrebt welche der Krümmungshalbmesser der betrachteten Curve am Puncte M heißt. (GL., 260). Die Formel für die Centripetalkraft [70] gilt daher bei jeder beliebigen Bahn, wenn man r in dieser letztern Bedeutung nimmt.

Folglich kann sich in irgend einem Augenblicke der Bewegung eines materiellen Puncts die Gesammtresultante φ der ihn angreifenden Kräfte zerlegen in eine tangentielle Kraft $\psi = m\frac{dv}{dt}$ (d. i. gleich dem Producte aus seiner Masse und der eben vorhandenen Beschleunigung) und eine normale oder centripetale Kraft $\chi = \frac{mv^2}{r}$ (d. i. gleich der doppelten lebendigen Potenz, dividirt durch den Krümmungshalbmesser des Curvenbogens, den zu beschreiben der Punct eben im Begriffe ist).

§. 7. Anwendungen der Theorie der Kreisbewegung.

240. Angenäherte Berechnung der Kraft welche den Mond gegen die Erde zieht.

Wir sehen ab von der gemeinsamen Bewegung der Erde und des Monds um die Sonne. Obgleich die Entfernung des Monds von der Erde veränderlich ist und bis zu ungefähr $\frac{1}{15}$ ihres mittlern Werthes über oder unter diesen abweichen kann, nehmen wir doch diesen mittlern Werth, welcher nahezu 60 Erdhalbmesser beträgt, als constante Entfernung an, und benützen nun die Theorie der gleichförmigen Kreisbewegung, wobei wir die Masse des Mondes in seinem Mittelpuncte vereinigt denken.

Führt man in die Formel [71] der Nr. 238 den Halbmesser R der Erde und die Umlaufszeit des Mondes um die Erde ein, welche 27,322 Tage oder 39344 Minuten umfaßt, so daß also $r = 60R$ und $T = 39344 \cdot 60''$ zu setzen ist, so liefert diese Formel

$$\chi = m\frac{4\pi^2 \cdot 60\,R}{(39344)^2 \cdot (60)^2}.$$

Aus der Definition des Meters weiß man, daß

$$2\pi R = 40\,000\,000.$$

Durch Substitution und nach Ausführung der Rechnung findet man

$$\chi = \frac{m}{369}.$$

Es sei nun A die Kraft, welche die Anziehung der Erde auf den Mond äußern würde, wenn dessen Masse in einem an der Erdoberfläche liegenden Punct vereinigt wäre. Die dieser Kraft enspreсhende Beschleunigung ist, wie man im folgenden Kapitel (Nr. 269) sehen wird, etwas größer als 9,81; wir nehmen näherungsweise 9,82 an. Man hat also

$$m = \frac{A}{9{,}82}$$

woraus folgt $\chi = \frac{A}{3624}$ oder fast $\frac{A}{(60)^2}$.

Folglich verhalten sich die Kräfte χ und A umgekehrt wie die Quadrate der Distanzen r und R. Hierin liegt der Ursprung des von Newton entdeckten und von ihm auf alle Weltkörper ausgedehnten Gravitationsgesetzes.

241. Conisches Pendel. — Ein starrer und undehnbarer Draht AM (Fig. 29), den wir uns aber als nicht schwer denken, ist durch ein Gelenk (Charnier) mit dem Puncte A einer verticalen Stange AB verbunden, welche sich um sich selbst dreht. Dieser Draht trägt in M einen der Schwere unterworfenen Punct. In einem gewissen Augenblicke, in welchem der Draht mit der Verticalen AB den Winkel α bildet, haben Stange und Draht die Winkelgeschwindigkeit ω. Man fragt, welche Relation zwischen dieser Winkelgeschwindigkeit und den Bestimmungsstücken des rechtwinkeligen Dreiecks AMB stattfinden muß, damit der Punct M, unter dem Zusammenwirken der Schwere und der Spannung des Drahts, seine horizontale Geschwindigkeit behauptet, mithin fortwährend den horizontalen Kreis durchläuft dessen Halbmesser MB ist.

Wir setzen BM = r, AB = h, AM = l. Der Punct M wird von zwei Kräften angegriffen, einer verticalen, welche sein Gewicht p oder mg ist, und einer durch den Draht ausgeübten, welche, wegen der freien Einlenkung in A, immer die Richtung MA annehmen muß. (Die Intensität dieser zweiten Kraft ist die Spannung des Drahtes.) Die Resultante beider Kräfte muß (234) die horizontale Richtung MB haben und $= m\omega^2 r$ sein. Diese drei Kräfte verhalten sich wie die ihnen parallelen Seiten des Dreiecks AMB (201). Daher gilt

$$m\omega^2 r : p \text{ (oder } mg) = r : h,$$

woraus folgt

$$\omega^2 = \frac{g}{h}, \quad \text{oder} \quad \omega^2 = \frac{g}{l \cos \alpha}. \qquad [73]$$

Will man in diese Formel die Dauer T eines Umschwungs einführen, so hat man

$$T = \frac{2\pi r}{\omega r} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}} = 2{,}006 \sqrt{l \cos \alpha}. \qquad [74]$$

Anmerkungen. — 1) Solange die verticale Stange nicht durch Einwirkung irgend einer Kraft ihre Geschwindigkeit wechselt, hat die Starrheit des Drahts gar nichts dazu beizutragen daß die Rotationsbewegung des Punctes M in demselben Gange bleibt.

Wird aber durch eine äußere Ursache die Winkelgeschwindigkeit der Stange verändert, so nimmt der Punct M vermöge der Starrheit des Drahts an dieser Aenderung Theil, und der Winkel α sucht einen andern Werth anzunehmen, den er wegen des Gelenkes auch erlangen kann.

2) Ist ω gegeben und wird der Winkel α gesucht, so hat man $\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}$. Nun ist $\cos\alpha$ immer < 1; hieraus folgt die Bedingung $\omega^2 > \frac{g}{l}$, und demgemäß $T < 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, oder $T < 2{,}006\sqrt{l}$, was sich auch unmittelbar aus $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$ ergibt.

3) Wenn der schräge Draht CM (Fig. 30) nicht an der Axe AB der verticalen Stange, sondern am Puncte C eingelenkt wäre, welcher in fester Verbindung mit der Stange steht, so würden die nämlichen Formeln [73] und [74] gelten; unter l wäre dann die Strecke MA zwischen M und dem Schnittpuncte der MC mit der verticalen Drehungsaxe zu verstehen.

242. Aufgabe. Eine Umdrehungsfläche AMB (Fig. 31), deren Axe Ax vertical steht, bewegt sich gleichförmig um diese Axe; eine kleine schwere Kugel, welche man in einem beliebigen Puncte M auf die innere (gegen die Axe gewendete) Seite der Fläche legt, bleibt, nachdem man ihr die nämliche Drehungsbewegung mitgetheilt hat, in relativer Ruhe gegen die Fläche. Man soll die Gestalt bestimmen vermöge welcher die Fläche diese Bedingung erfüllen kann.

Die Fläche wird bestimmt sein, wenn die Curve AMB gefunden ist welche den Schnitt der durch die Umdrehungsaxe gehenden Ebene MAx darstellt. Es sei MT Tangente dieser Curve und MN die zugehörige Normale, welche zugleich Normale für die Fläche selbst ist.

Die Aufgabe geht auf die vorige zurück. Der normale Widerstand MN der Fläche vertritt den Zug des Drahtes; die Größe h der Gleichung $\omega^2 = \frac{g}{h}$ geht in die Subnormale PN über; der Werth dieser Subnormalen, ausgedrückt als Function der Winkelgeschwindigkeit ω, ist also $PN = \frac{g}{\omega^2}$,

mithin constant, — eine Eigenschaft, welche die Parabel charakterisirt (GL. 222, 116). In der That geben die ähnlichen Dreiecke NPM, MPT

$$PN : PM = PM : PT$$

oder
$$\frac{PN}{y} = tgT = \frac{dy}{dx}, \quad (GL. 220)$$

woraus folgt

$$PN = y \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \text{oder} \quad \frac{g}{\omega^2} \cdot dx = ydy;$$

und durch Integration erhält man

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2} \cdot x,$$

die Gleichung einer Parabel.

Die hier besprochene Umdrehungsfläche zeigt (wie man leicht sieht) die Gestalt, welche eine schwere Flüssigkeit in einem Gefäße anzunehmen strebt, wenn diesem eine gleichförmige Rotationsbewegung um eine feste verticale Axe ertheilt wird.

243. Aufgabe. Ein schwerer materieller Punct M, der durch zwei Fäden MA, MA' (Fig. 32) an zwei feste Puncte A, A' gebunden ist, beschreibt einen horizontalen Kreis vom Halbmesser MB = r mit der Geschwindigkeit v. Man verlangt die Spannungen der Fäden MA, MA'.

Die Centripetalkraft χ oder $\frac{mv^2}{r}$ ist die Resultante aus den beiden unbekannten Kräften F, F' und dem Gewichte p oder mg, welches als verticale Kraft wirkt. Werden die Winkel BMA, BMA' durch α und α' bezeichnet, so hat man (203)

$$F \cos \alpha + F' \cos \alpha' = \frac{mv^2}{r},$$

$$mg + F' \sin \alpha' - F \sin \alpha = 0,$$

und diese beiden Gleichungen ersten Grades enthalten die Lösung der Aufgabe. Sollten die gegebenen Größen in einem besondern Falle auf einen negativen Werth für eine der Kräfte F, F' führen, z. B. für F', so würde dieß bedeuten, daß der entsprechende Faden den Punct M im Sinne A'M zu schieben sucht und folglich starr zu denken ist.

Man kommt auf die nämlichen Gleichungen, wenn man sagt, die drei Kräfte F, F', p seien mit der Centrifugalkraft im Gleichgewicht. Letzteres ist für

sich klar; denn die Centrifugalkraft ist gleich und entgegengesetzt der Centripetalkraft, welche hier als Resultante aus F, F′, p auftritt.

244. Kreisbewegung eines schweren Punctes in einer verticalen Ebene.

Der materielle Punct M (Fig. 33) ist, mittels eines Fadens OM, gezwungen, in constantem Abstande r von dem festen Puncte O zu bleiben; wenn er seine höchste Lage A erreicht, besitzt er die Geschwindigkeit a; im Uebrigen ist er der Schwere unterworfen. Es handelt sich darum, für eine beliebige Lage M desselben seine Geschwindigkeit und die Spannung Q des Fadens zu bestimmen.

Die Gleichung des Effects der Arbeit (216, 222) gibt (wenn x die Distanz AB bezeichnet um welche die Horizontale MB unterhalb A liegt):

$$\tfrac{1}{2}\,mv^2 - \tfrac{1}{2}\,ma^2 = px, \quad \text{oder} \quad v^2 = a^2 + 2gx;$$

denn die Kraft Q, mit welcher der Faden den Punct M hält, erzeugt keine Arbeit, da ihre Richtung MO in jedem Augenblicke senkrecht auf dem beschriebenen Wege steht (77).

Die in die Richtung MO fallenden rechtwinkeligen Composanten der Kräfte Q und p müssen als algebraische Summe $\frac{mv^2}{r}$ geben, weil diese Summe die Centripetalkraft ist (233). Man hat daher (unter Bezeichnung des Winkels MOA durch α):

$$Q + p\cos\alpha = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{oder} \qquad Q + p\,\frac{r - x}{r} = \frac{pv^2}{gr},$$

oder, wenn man für v^2 seinen Werth $a^2 + 2gx$ setzt:

$$Q + p - \frac{px}{r} = \frac{pa^2}{gr} + \frac{2px}{r},$$

woraus folgt

$$Q = p\left(\frac{a^2}{gr} + \frac{3x}{r} - 1\right). \qquad [75]$$

Diese Gleichung löst in Verbindung mit der Gleichung $v^2 = a^2 + 2gx$ die vorgelegte Aufgabe.

Der Ausdruck für Q läßt erkennen, daß diese Kraft auch negativ werden kann, so daß sie im Sinne OM anstatt in dem bei der Rechnung vorausgesetzten Sinne MO wirkt. In diesem Falle muß der Faden starr gedacht werden.

245. Die Gleichung $\frac{1}{2}\,mv^2 - \frac{1}{2}\,ma^2 = px$, oder die gleichbedeutende $v^2 = a^2 + 2gx$, würde auch für die Bewegung eines materiellen Punctes

gelten welcher der Wirkung der Schwere unterworfen, und außerdem gezwungen ist auf einer beliebigen Curve zu bleiben, die ihm blos einen normalen Widerstand darbietet. Bei dieser Annahme paßt die Gleichung nicht nur für die abwärts durchlaufenen Lagen des beweglichen Punctes M, sondern auch wenn er wieder ansteigt. Die Arbeit der Schwere während des Steigens ist negativ; aber der Ueberschuß der während des Sinkens entwickelten positiven Arbeit über die darauf folgende negative ist stets px, wenn x die veränderliche Distanz bezeichnet um welche das Bewegliche unter die durch seine Anfangslage gehende Horizontalebene herabgekommen ist. Hat die Curve eine solche Gestalt, daß sie durch eine verticale Axe in zwei symmetrische Hälften getheilt wird, so sind irgend zwei symmetrisch gelegene Bogenelemente gleich und werden mit gleichen Geschwindigkeiten durchlaufen, folglich auch in gleichen Zeiten; zwischen zwei beliebigen Horizontalebenen ist daher die Dauer des Aufsteigens gleich der des Herabsinkens.

246. Statt das Bewegliche an einen Faden zu befestigen, wie in Nr. 244, kann man auch annehmen, dasselbe gleite ohne Reibung über die convexe Oberfläche eines Drehungscylinders mit horizontaler Axe, wobei seine Anfangsgeschwindigkeit a am höchsten Puncte A die Richtung der Tangente am Kreise AMC hat. In diesem Falle kann aber das Bewegliche nur insofern auf der Fläche bleiben als die Kraft Q in der vorhergegangenen Formel [75] negativ ist. Daher muß $\frac{a^2}{gr} < 1$ sein, mithin $\frac{ma^2}{r} < p$, d. h. das Gewicht muß größer sein als die der Anfangsgeschwindigkeit entsprechende Centrifugalkraft. Diese Bedingung kann auch in der Form $\frac{a^2}{2g} < \frac{r}{2}$ ausgedrückt werden, d. h. die Höhe für die Geschwindigkeit a muß kleiner sein als die Hälfte des Halbmessers, damit der Körper bei seinem Ausgange vom höchsten Punct A auf der Fläche verbleibe.

Die Abscisse x des Punctes, wo das Bewegliche die Fläche verlassen wird, bestimmt sich aus der Gleichung

$$Q = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{a^2}{gr} + \frac{3x}{r} - 1 = 0,$$

nämlich

$$x = \frac{r}{3} - \frac{a^2}{3g}.$$

Sollte der Körper auf der concaven Fläche des Cylinders gleiten, so müßte Q in der Formel [75] positiv sein; die Bedingung wäre also:

$$\frac{a^2}{2g} > \frac{r}{2}.$$

§. 8. Schwingungen des einfachen Pendels.

247. Unter Beibehaltung der Angaben in Nr. 244 wollen wir annehmen, das Bewegliche verlasse ohne Anfangsgeschwindigkeit einen Punct der Peripherie welcher nicht dem verticalen Durchmesser angehört. Die Betrachtungen in Nr. 245 zeigen, daß, wenn die Voraussetzungen der Aufgabe verwirklicht werden könnten, das Bewegliche ohne Aufhören Schwingungen von gleicher Weise und Zeitdauer machen müßte. Beim Versuche vermindert sich durch den Luftwiderstand und durch die Reibung die Weite der Schwingungen ziemlich schnell, wenn sie anfänglich groß war; dagegen wird der Einfluß jener Hindernisse unmerklich, wenn die Schwingungsweite sehr klein geworden ist, und man kann dann die Dauer der Oscillationen berechnen, indem man von der Körperlichkeit des zum Aufhängen dienenden Fadens oder Stabes absieht. In dieser theoretischen Auffassung hat man dann ein einfaches Pendel; der Halbmesser des vom schweren Puncte beschriebenen Kreisbogens ist die Länge des Pendels.

248. Dauer kleiner Pendelschwingungen. (Fig. 34.) — Wenn der von A ausgegangene Körper in M angekommen ist, wird seine Geschwindigkeit v durch die Formel

$$v = \sqrt{2gx}$$

angegeben, welche, wie in Nr. 244, aus der Gleichung des Arbeits-Effects gezogen ist, indem man durch x die Projection BP des Bogens AM auf die Verticale OC bezeichnet. Nimmt man von M aus einen unendlich kleinen Bogen MM′ oder ds, welcher in der unendlichkleinen Zeit dt durchlaufen wird, so hat man auch noch

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad \text{also} \qquad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gx}}. \qquad [76]$$

Dadurch ist die zur Zurücklegung des unendlich kleinen Bogens ds aufgewendete Zeit als Function der Länge dieses Bogens und der Abscisse x oder BP ausgedrückt.

Um die Dauer einer Halb-Schwingung (d. i. des Laufes durch den Bogen AC) zu erhalten, hat man diesen Ausdruck für dt zu integriren, nachdem vorher ds in x und dx ausgedrückt worden ist. Zieht man die Ordinate M′P′, so ist PP′ der Zuwachs von x während der Zeit dt; also PP′ = dx. Die verlangte Relation zwischen ds und dx ersieht man leicht aus der Figur, wenn man den Halbmesser MO und die kleine Verticale M′N (= dx) zieht. Das

unendlich kleine rechtwinkelige Dreieck MM'N ist dem Dreieck OMP ähnlich, und gibt

$$MM' : M'N = MO : MP$$

oder (indem man MO = l und MP = y setzt)

$$ds : dx = l : y;$$

also
$$ds = \frac{ldx}{y}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von ds in [76] kommt

$$dt = \frac{l}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dx}{y\sqrt{x}},$$

und in diese Formel könnte man leicht für y seinen genauen Werth, in x und bekannten Größen ausgedrückt, einführen. Da aber die so erhaltene Function nicht zu denen gehört die sich unter endlicher Form integriren lassen, so vereinfacht man sie zuerst durch die Bemerkung, daß, wenn der Bogen AC klein genug ist, das Verhältniß der Ordinate MP oder y zur Sehne MC sehr wenig von 1 : 1 abweicht, und daß also, wenn man anschreibt

$$y = \frac{\text{Sehne CM}}{\alpha},$$

die veränderliche Zahl α immer nur um Weniges größer als 1 sein kann.

Nun ist die Sehne CM die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser 2l und dem veränderlichen Segment CP, welches wir durch z bezeichnen; nämlich

$$CM = \sqrt{2lz}; \quad \text{also} \quad y = \frac{1}{\alpha}\sqrt{2lz};$$

und nach Substitution dieses Werthes in vorstehendem Ausdruck von dt:

$$dt = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{xz}}. \qquad [77]$$

Die Summe der Veränderlichen x, z ist constant und = BC; bezeichnen wir sie durch 2b und mithin z durch 2b — x, so folgt

$$dt = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{2bx - x^2}}.$$

Läßt man die Veränderlichkeit der Zahl α unberücksichtigt, und schreibt dafür 1, oder wenigstens einen constanten Mittelwerth aus den verschiedenen Werthen deren sie fähig ist, so wird es leicht, den Ausdruck für dt zu integriren, entweder nach den bekannten Formeln der Integralrechnung

(s. Note zu Nr. 178), oder durch die geometrische Methode welche (nach Poncelet) in Nr. 178 angegeben wurde. In Beziehung auf den letztern Weg ist $\sqrt{xz}$ gleich der Ordinate PL eines über dem Durchmesser BC beschriebenen Halbkreises. Bezeichnet man durch $d\sigma$ den Bogen LL' welcher auf diesem Halbkreise durch die Horizontalen MP, M'P' ausgeschnitten wird, zieht die kleine Verticale LH = dx und den Halbmesser LI = b, so geben die beiden ähnlichen Dreiecke LHL' und LPI

$$PL : IL = LH : LL', \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{xz} : b = dx : d\sigma.$$

Die Substitution des hieraus folgenden Werthes von $\sqrt{xz}$ in dem Ausdrucke [77] für dt liefert

$$dt = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\sigma}{b}, \qquad [78]$$

und dieß ist die Zeit, in welcher der kleine Bogen MM' oder ds durchlaufen wird, der zwischen denselben Horizontalen liegt wie $d\sigma$ oder LL'.

Betrachtet man die Zahl α als = 1, welchem Werthe sie sehr nahe kommt wenn der Winkel AOB klein ist, so erhält man die ganze Zeitdauer der Halbschwingung durch Multiplication des constanten Factor $\frac{1}{2b} \sqrt{\frac{l}{g}}$ mit der von B bis C genommenen Summe jener kleinen Bögen von denen LL' einer war, d. h. mit dem halben Umfang BLC = πb; und die Verdoppelung dieses Products gibt die Zeit T der ganzen Schwingung; nämlich

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad [79]$$

Anmerkung. Das Herabsinken von A nach C längs des Kreisbogens erfolgt in der Zeit $\frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, während dasselbe nach der Sehne die Zeit $2 \sqrt{\frac{l}{g}}$ erfordert hätte (229). Das Verhältniß dieser beiden Zeiträume ist also angezeigt durch $\frac{1}{4}\pi = 0{,}785\ldots$

249. Streng genommen ist der Werth $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ der Zeit etwas zu klein, weil man eigentlich jedes Element derselben durch den entsprechenden Werth der veränderlichen und 1 um ein Weniges übersteigenden Zahl α hätte multipliciren sollen. Zur Schätzung des begangenen Fehlers bemerke man, daß der größte Werth von α zur Anfangslage A gehört und

$=\frac{CA}{AB}$ (Fig. 35) ist. Es sei β das als bekannt vorausgesetzte und durch einen sehr kleinen Bruch dargestellte Verhältniß der Sehne CA zum Halbmesser OA oder l Fällt man auf CA die Senkrechte OK, so geben die ähnlichen rechtwinkeligen. Dreiecke ABC, OKC

$$CA : AB = l : OK.$$

Nun ist

$$OK = \sqrt{l^2 - (\tfrac{1}{2}\,AC)^2} = \sqrt{l^2 - \tfrac{1}{4}\,\beta^2 l^2},$$

daher $$\frac{CA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\beta^2}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{16} + \ldots}$$

Wegen der Kleinheit von β kann dieser Werth nur äußerst wenig von

$$\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^4}{64}} \quad \text{oder von} \quad 1 + \frac{\beta^2}{8}$$

abweichen; letzterer Werth gibt also in sehr großer Annäherung das Maximum von α.

Da sonach der Coefficient α in der Formel [78] sich nur innerhalb der Grenzen $1 + \frac{\beta^2}{8}$ und 1 verändert, so muß das arithmetische Mittel aus diesen beiden Grenzwerthen, nämlich $1 + \frac{\beta^2}{16}$, der strengen Genauigkeit sehr nahe liegen. Folglich liefert die Integration der Formel [78] für die Dauer einer Schwingung

$$T = \left(1 + \frac{\beta^2}{16}\right) \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Beispiel.

$$AC = 0{,}02\,.\,l; \qquad \beta = 0{,}02; \qquad \frac{\beta^2}{16} = \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0{,}000025.$$

Dieser Werth von β entspricht einer Schwingungsweite von ungefähr $2^0 18'$; so nennt man nämlich den Winkel welchen das Pendel mit jeder Schwingung zurücklegt. Wäre der Werth für β doppelt so groß als er oben angenommen ist, so würde die Correction $\frac{\beta^2}{16}$ sich vervierfachen.

250. Die bei sehr kleinen Schwingungen anwendbare Formel $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ zeigt 1) daß solche Schwingungen für ein und dasselbe Pendel oder für zwei Pendel von gleicher Länge isochron sind, d. h. immer von der näm-

lichen Dauer, unabhängig von der Weite; 2) daß für zwei verschiedene Pendel die Schwingungszeiten sich verhalten wie die Quadratwurzeln der Längen; 3) daß man mit Hülfe eines Pendels (gebildet durch eine kleine aber gewichtige Kugel, welche an einem leichten Faden aufgehangen ist) die aus der Schwere entspringende Beschleunigung g messen kann; denn man hat $g = \frac{\pi^2 l}{T^2} = \frac{\pi^2 n^2 l}{\tau^2}$, wobei n die Zahl der Schwingungen ist welche in einer gewissen Zeit τ stattfinden. Und da die Beobachtungen zeigen, daß die Anzahl $\frac{n}{\tau}$ der Schwingungen in der Secunde bei allen Pendeln von gleicher Länge immer dieselbe ist, von welchem Stoffe auch der schwingende Körper sein möge, so ist dadurch erwiesen, daß die Beschleunigung g die nämliche für alle Körper ist, welche an einem und demselben Orte dem Versuche unterworfen werden.

Diese theoretischen Resultate werden ihre völlige practische Brauchbarkeit erst erlangen wenn die Bewegung des zusammengesetzten Pendels abgehandelt sein wird, was in einem spätern Abschnitte dieses Buches geschehen soll.

251. Die Aehnlichkeit der in Nr. 178, 241 und 248 erhaltenen Formeln gibt Gelegenheit zu einer bemerkenswerthen Zusammenstellung.

Wird ein materieller Punct von der Masse m durch eine Kraft fx getrieben, welche seiner Distanz x von einem geometrischen Puncte seines geradlinigen Wegs proportional bleibt, so ist, wie wir (185) gesehen haben, seine Bewegung oscillatorisch, und die Dauer einer doppelten Oscillation (d. h. die Zeit zwischen dem Ausgang von einem Endpuncte des Wegs und der Wiederankunft am nämlichen Endpuncte) ist $2\pi\sqrt{\frac{m}{f}}$.

Beim einfachen Pendel bewegt sich der Punct auf seinem Kreisbogen ebenso, wie er sich auf einer Geraden unter der Wirkung der Tangentialkraft bewegen würde. Diese Kraft ist in dem Augenblicke, wo das Bewegliche die Lage M (Fig. 34) einnimmt, gleich seinem Gewichte mg multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels zwischen der Verticalen und der Tangente in M, also = mg sin MOC; und da dieser Winkel sehr klein ist, kann man für seinen Sinus das Verhältniß des Bogens MC zum Halbmesser MO oder l setzen. Bezeichnet man daher den Bogen MC durch x, so ist die Tangentialkraft durch $\frac{mgx}{l}$ dargestellt; ihr Ausdruck hat also die Form fx, indem man $\frac{mg}{l} = f$ setzt, woraus $\frac{m}{f} = \frac{l}{g}$ folgt. Substituirt man diesen Werth in dem allgemeinen Ausdrucke $2\pi\sqrt{\frac{m}{f}}$

der Nr. 185, so findet man die Dauer einer doppelten Oscillation gleich $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, wie sie sich aus der directen Berechnung in Nr. 248 ergeben hat.

Beim conischen Pendel (241) beschreibt der materielle Punct einen horizontalen Kreis unter der Einwirkung zweier Kräfte, einer verticalen mg (= dem Gewichte des Puncts) und einer gegen den Anheftungspunct des Drahts gerichteten (= der Spannung des Drahtes). Diese beiden Kräfte haben eine horizontale Resultante χ, deren Richtung von dem beweglichen materiellen Puncte nach dem Mittelpuncte des beschriebenen Kreises geht. Denken wir uns nun, der materielle Punct werde während seiner Bewegung in jedem Augenblick auf einen und denselben Durchmesser ML des Kreises (Fig. 36) projicirt,*) so bewegt sich die Projection N wie ein Punct von der Masse m unter der Einwirkung einer Kraft, welche gleich der Projection von χ auf ML ist (209). Diese Projection ist aber ausgedrückt durch $\frac{\chi x}{r}$, wenn x die Distanz BN und r den Halbmesser BN' oder BM bedeutet. Die oscillatorische Bewegung der Projection N erfolgt also in der Art wie es vermöge einer Kraft von der Form fx der Fall sein muß, indem man $\frac{\chi}{r} = f$ setzen kann, woraus sich $\frac{m}{f} = \frac{mr}{\chi}$ ergibt. Die Dauer T einer doppelten Oscillation ist daher $2\pi\sqrt{\frac{mr}{\chi}}$. Erinnern wir uns nun, daß die Kräfte χ und mg den Seiten MB, AB des Dreiecks ABM proportional sind, so haben wir

$$mg : \chi = h : r, \quad \text{mithin} \quad \frac{mr}{\chi} = \frac{h}{g}, \quad \text{und folglich} \quad T = \sqrt{\frac{h}{g}},$$

wie auf directerem Wege in Nr. 241 gefunden wurde.

§. 9. Bewegung eines schweren materiellen Puncts auf der Cycloide, ohne Reibung.

252. Die merkwürdigen Eigenschaften der in der Aufschrift genannten Bewegung haben die Geometer des achtzehnten Jahrhunderts vielfach beschäftigt. Wir wollen diese Eigenschaften, ihrer Berühmtheit wegen, in Kürze darlegen, obwohl sie keine practische Anwendung finden.

Es sei ABC (Fig. 37) eine in verticaler Ebene liegende Cycloide; die Basis AC ist horizontal; der Scheitel B ist der tiefste Punct. Ein schwerer

*) Die Fig. 36 ist als Grund- und Aufriß zu verstehen.

Punct geht von der Lage H aus und sinkt auf der Curve ohne Reibung herab, in der Art daß er blos der Wirkung der Schwere und der normalen Rückwirkung der Curve ausgesetzt ist. Man verlangt die Dauer des Herabsinkens von H nach B. Liegt H′ in einerlei Horizontallinie mit H, so ist die gesuchte Zeit zugleich die Dauer des Aufsteigens auf der andern Hälfte der Cycloide von B bis H′ (245).

Die Geschwindigkeit des Körpers bei seinem Durchgange durch den Punct M der Curve ist $\sqrt{2gy}$, wenn y die Distanz PI angibt um welche der Punct M unterhalb der Horizontalen HH′ liegt (245).

Den Bogen HM der Curve bezeichnen wir durch s; und ds sei der unendlich kleine Bogen MM′ welcher in der Zeit dt durchlaufen wird. Man hat dann

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy} \quad \text{oder} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}. \qquad [80]$$

Um die Veränderliche s zu eliminiren, ziehen wir die Horizontale MP und die kleine Verticale M′L, welche das Differential dy vorstellt; ferner die Normale MN und die Tangente MT (Fig. 219). Die beiden letztern Linien schneiden beziehungsweise die Horizontalen AC, BT in den Puncten N, T; und die hiedurch begrenzte Linie NT ist der verticale Durchmesser für die durch den Punct M gehende Lage des Erzeugungskreises. Da der Bogen MM′ als auf die Tangente MT fallend angesehen werden kann, so hat man ähnliche Dreiecke MM′L, MTQ, und aus ihnen die Proportion $MM' : LM' = MT : TQ$, oder, wenn TQ durch z und der Durchmesser TN durch 2r bezeichnet wird:

$$ds : dy = \sqrt{2rz} : z; \qquad ds = \sqrt{\frac{2r}{z}} \cdot dy. \qquad [81]$$

Die Substitution in [80] gibt:

$$dt = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{yz}}.$$

Diese Gleichung ist der Formel [77] in Nr. 248 ähnlich, wenn man dort $\alpha = 1$ und $l = 4r$ setzt; denn die beiden von der Zeit abhängigen Veränderlichen y, z haben auch hier eine constante Summe BI. Es folgt hieraus, daß die in Nr. 248 ausgeführte Integration auch im gegenwärtigen Falle Anwendung findet, und mithin ist die Dauer einer Schwingung, d. h. des Laufes von H bis H′, nach der Formel [79]:

$$T = \pi \sqrt{\frac{4r}{g}}, \qquad [82]$$

wie beim einfachen Kreis-Pendel; doch mit dem Unterschiede, daß auf der Cycloide die Weite der Schwingungen ein beliebiges Stück der Curve um-

fassen kann, ohne daß die Schwingungsdauer sich ändert, während die Formel [79] sehr kleine Schwingungen voraussetzt. Dieser Eigenschaft wegen ist die Cycloide die Tautochrone (Curve gleicher Schwingungsdauer) genannt worden.

Sind die Schwingungen auf der Cycloide sehr klein, so kann man sie beinahe als kreisförmig betrachten, indem man an die Stelle der Curve ABC ihren Krümmungskreis (Osculationskreis) am Puncte B setzt (GL. 260). Nun weiß man, daß der Krümmungshalbmesser für diesen Punct das Doppelte vom Durchmesser des Erzeugungskreises ist (51); in der Formel [79] der Nr. 248 hat man daher $l = 4r$ zu setzen, was mit Obigem übereinstimmt.

253. Die Formel [81] führt auf eine merkwürdige Relation zwischen der Länge des Cycloidenbogens BM und seiner verticalen Projection BP. Es sei $BM = s'$; dann ist $MM' = -ds'$ und $LM' = -dz$. Setzt man daher in [81] $ds = -ds'$ und $dy = -dz$, so kommt

$$ds' = \sqrt{\frac{2r}{z}} \,.\, dz \qquad \text{oder} \qquad \sqrt{2r} \,.\, z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

und durch Integration von $z = 0$ an:

$$s' = 2\sqrt{2rz} \qquad \text{oder} \qquad s'^2 = 8rz.$$

Dieß ist die Formel für die Rectification der Cycloide. Macht man $z = 2r$, so findet man die Länge der halben Cycloide $BA = 4r =$ dem doppelten Durchmesser TN.

254. Man hat bereits gesehen (248, Anm.), daß die Fallbewegung eines schweren Puncts von A nach C (Fig. 34) auf einem Kreisbogen, dessen Tangente in C horizontal liegt, rascher erfolgt als auf der Sehne dieses Bogens. Von welcher Art wäre nun aber die Curve des möglichstschnellen Fallens? Diese Aufgabe wurde von Johann Bernoulli 1696 gestellt. Hier folgt, mit einigen Abänderungen in der Darstellung, die Lösung welche Jacob Bernoulli, der ältere Bruder Johann's, gegeben hat (Jacobi Bernoulli opera, 1744, tom. II, p. 769).

Es seien M, M', M'' (Fig. 38) drei einander unendlich nahe liegende Puncte der gesuchten Curve, und y, y' die verticalen Distanzen der Puncte M, M' von der Horizontalen AC, welche durch denjenigen Punct gelegt ist von dem das Bewegliche ohne Anfangsgeschwindigkeit ausgeht.

Die Zeit des Herabsinkens von M nach M'' ist, nach der Formel [80], ausgedrückt durch

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}}.$$

Diese Zeit soll ein Minimum sein in Beziehung auf alle die Wege welche das Bewegliche für sein Herabkommen aus M nach M″ hätte einschlagen können. Ist dieß wirklich der Fall, so darf durch horizontale Verschiebung des Durchgangspuncts M′ um eine Strecke M′L, welche in Rücksicht der Längen MM′ und M′M″ unendlich klein ist, die unterwegs zugebrachte Zeit nur eine Aenderung erfahren welche in Rücksicht obiger Summe unendlich klein erscheint. Nun ist die Dauer des Laufs auf MLM″

$$\frac{ML}{\sqrt{2gy}} + \frac{LM''}{\sqrt{2gy'}}.$$

Mit einem relativen Fehler, der ohne Ende abnimmt wenn L näher und näher an M′ kommt, hat man daher

$$\frac{MM'}{\sqrt{2gy}} + \frac{M'M''}{\sqrt{2gy'}} = \frac{ML}{\sqrt{2gy}} + \frac{LM''}{\sqrt{2gy'}}$$

oder

$$\frac{MM' - ML}{\sqrt{y}} = \frac{LM'' - M'M''}{\sqrt{y'}}. \qquad [83]$$

Man ziehe jetzt LP senkrecht zu MM′, und M′Q senkrecht zu M″L. In der ersten Gleichung kann man für die Länge ML ihre Projection MP setzen, welche sich von ihr nur um eine gegen LM′ unendlich kleine Größe unterscheidet (112); und ebenso läßt sich für M′M″ ihre Projection M″Q auf LM″ substituiren. Die linke Seite der Gleichung [83] erhält dadurch M′P oder LM′ . cos MM′N zum Zähler, die rechte LQ oder LM′ . cos M″M′N″. Die Gleichung reducirt sich also, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors LM′, auf

$$\frac{\cos MM'N}{\sqrt{y}} = \frac{\cos M''M'N''}{\sqrt{y'}}. \qquad [84]$$

Durch diese Relation gelangt man leicht zu einer Differential-Gleichung der gesuchten Curve. Da nämlich MM′, M′M″ zwei aufeinanderfolgende Elemente der Curve sind, und NM′, M′N″ ihre horizontalen Projectionen, so setzen wir

$$MM' = ds, \quad M'M'' = ds'; \quad NM' = dx, \quad M'N'' = dx';$$

$$\cos MM'N = \frac{dx}{ds}, \quad \cos M''M'N'' = \frac{dx'}{ds'}.$$

Hiernach formt sich die Gleichung [84] um in

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{y'}} \cdot \frac{dx'}{ds'},$$

wodurch offenbar ausgesagt wird, daß für jeden beliebigen Punct der Curve die Größe $\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dx}{ds}$ constant ist.

Diese Eigenschaft aber bezeichnet die Cycloide, deren Ursprung A (Fig. 37) mit dem Ausgangspuncte des Beweglichen zusammenfällt. Denn für irgend ein Element MM′ (Fig. 37) hat man die Proportion

$$ML : MM' = NQ : MN,$$

oder, wenn man für MN den Werth $\sqrt{2r \, . \, NQ}$ setzt, dann NQ durch y ausdrückt und den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{y}$ entfernt:

$$dx : ds = \sqrt{y} : \sqrt{2r},$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2r}} = \text{const.}$$

Folglich ist die Curve des schnellsten Falles von A nach C (oder die Brachystochrone) eine Cycloide welche im Ausgangspuncte A des Beweglichen entspringt.

Das unvermeidliche Auftreten der Reibung macht, daß diese Eigenschaft und die des Tautochronismus (252) sich durch Versuche mit Körpern, welche über eine cycloidische Oberfläche gleiten, nicht verwirklichen lassen. Theoretisch richtig ist, daß ein materieller Punct, der an einem undehnbaren Faden hängt und in Schwingung versetzt wird, eine Cycloide von gegebener Gestalt beschreibt, wenn man das andere Ende des Fadens im gemeinschaftlichen Ursprung D (Fig. 37) zweier Halb-Cycloiden DA, DC befestigt, welche der gegebenen congruent und so gestellt sind, daß der Faden abwechselnd eine derselben umfängt. In der Praxis aber fallen auch bei dieser sinnreichen, von Huyghens ausgedachten Anordnung die Resultate anders aus, wegen der Masse des Fadens, seiner Straffheit, seiner Dehnbarkeit, und wegen des Luftwiderstandes.

Man zieht dem cycloidischen Pendel das Kreis-Pendel vor, welches, wie Laplace sagt, hinreichende Genauigkeit selbst für die Astronomie gewährt.

Drittes Kapitel.

Relative Bewegung eines materiellen Puncts in Beziehung auf ein unveränderliches geometrisches System, welches selbst in Bewegung ist.

---

255. Wir wenden uns zurück zu den früher (Nr. 34 u. f.) angestellten Betrachtungen über die Bewegung eines Puncts bezüglich eines starren geometrischen Systems, welches selbst in Bewegung begriffen ist; wir denken uns, ein in die Bewegung dieses Systems unbewußt mithineingezogener Beobachter richte sein Augenmerk auf einen materiellen Punct, und letzterer bewege sich auf irgend eine Weise vermöge seiner Anfangsgeschwindigkeit und verschiedener Kräfte, welche in jedem Augenblick seine absolute Bewegung im Raume modificiren.

Außerdem daß dieser Beobachter als wirkliche Geschwindigkeit des Beweglichen auffaßt was blos dessen relative Geschwindigkeit ist (37), wird er auch die scheinbare Bewegung aus Kräften herleiten welche im Allgemeinen von den wirklich thätigen verschieden sind. Dreht sich z. B. das geometrische Vergleichungssystem gleichförmig um eine feste Axe, und ist der beobachtete Punct im Raume fest, so wird es den Anschein haben, als beschreibe dieser Punct um die feste Axe einen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit, und sei folglich von einer constanten centripetalen Resultante getrieben (234); während in Wahrheit die Resultante der Kräfte, welche auf diesen Punct wirken können, null ist. Diese Bemerkung leitet auf Untersuchungen, mit denen sich die beiden Paragraphen dieses Kapitels zu beschäftigen haben werden.

§. 1. Von den scheinbaren Kräften in dem Falle wo das geometrische Vergleichungssystem eine Translationsbewegung hat.

256. Zwei Sätze sind vorauszuschicken.

Erster Lehrsatz. Werden mehrere materielle Puncte, welche in einem gewissen Augenblick gleiche und parallele Geschwin-

digkeiten in einerlei Sinn besitzen, von diesem Augenblick an durch Kräfte angeregt, welche in gleichem Sinne parallel sind und sich verhalten wie die Massen der von ihnen angegriffenen Puncte, so erhält das System dieser Puncte eine Translationsbewegung (44). Dieß ist leicht einzusehen, wenn man sich Rechenschaft gibt von der Wirkung jeder einzelnen Kraft auf den Punct den sie angreift (208). Wären z. B. verschiedene Körper im leeren Raume mit gleichen und in einerlei Sinn parallelen Geschwindigkeiten emporgeworfen und dann der Schwere überlassen worden, so würden sie eine gemeinsame Translationsbewegung annehmen.

257. **Zweiter Lehrsatz.** Ist in einem gewissen Anfangsaugenblick die Geschwindigkeit eines materiellen Puncts die Resultante zweier Geschwindigkeiten u, w, und ist die den Punct angreifende Gesammtkraft die Resultante zweier Kräfte F', F'', welche während eines Zeitraums τ constant bleiben, so ist die Sehne AM (Fig. 39) des vom Beweglichen in dieser Zeit durchlaufenen Weges die geometrische Resultante aus den geradlinigen Wegen $u\tau$, $w\tau$, $\frac{1}{2}\frac{F'}{m}\tau^2$, $\frac{1}{2}\frac{F''}{m}\tau^2$, welche den einzelnen Geschwindigkeiten u, w und den einzelnen Kräften F', F'' entsprechen würden; wobei man nämlich unter der geometrischen Resultante mehrerer Geraden die Linie versteht, zu welcher man gelangt wenn man an diesen Geraden (als geometrische Composanten angesehen) dieselben Constructionen vornimmt wie wenn es sich um die Resultante von Kräften handelte welche durch die genannten Geraden dargestellt wären.

Es sei v die absolute Anfangsgeschwindigkeit, also die Resultante aus u und w; und R sei die Kraft welche aus F' und F'' resultirt. Die Sehne AM ist (208) die Diagonale des Parallelogramms aus $AB = v\tau$ und $AC = \frac{1}{2}\frac{R}{m}\tau^2$. Man sieht nun leicht, daß AB die geometrische Resultante für $u\tau$ und $w\tau$ ist (37), während AC die Resultante für $\frac{1}{2}\frac{F'}{m}\tau^2$ und $\frac{1}{2}\frac{F''}{m}\tau^2$ darstellt (200); und hieraus folgt der obige Satz, welcher sich offenbar auf beliebig viele Geschwindigkeits-Composanten und Kräfte ausdehnen läßt.

258. Wir gehen nun zu der Untersuchung über welche in der Aufschrift dieses Paragraphen als Gegenstand desselben bezeichnet ist.

Aufgabe. Die Relation zu finden zwischen der Resultante wirklich vorhandener Kräfte, welche einen materiellen Punct angreifen, und der scheinbaren Gesammtkraft welche

der relativen Bewegung desselben entspricht, wenn das geometrische Axen-System eine bestimmte Translationsbewegung hat.

In dem besondern Falle, wo der materielle Punct in relativer Ruhe ist und also nur von der Translationsbewegung der Axen mitgenommen wird, muß Zweierlei stattfinden; nämlich (256): 1) in einem Augenblicke, welcher als der anfängliche betrachtet wird, besitzt der Punct eine erlangte Geschwindigkeit gleich der gemeinsamen Geschwindigkeit aller mit den Axen verbundenen Puncte in diesem Augenblicke; 2) von jenem Augenblicke an wird der materielle Punct in Wirklichkeit von einer Kraft angeregt, welche fähig ist, seiner erlangten Bewegung die Beschleunigung und die Krümmung der gemeinsamen Bewegung mitzutheilen (239). Diese Transportkraft (force d'entraînement), welche constant oder veränderlich ist, je nach der Art in welcher die Axen sich bewegen, soll im Folgenden durch F_e bezeichnet werden.

Nach dieser Bemerkung kehren wir zur vorgelegten Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zurück.

Es sei A (Fig. 40) die Lage des Beweglichen im betrachteten Augenblick; V sei seine absolute Geschwindigkeit, welche sich zerlegt in die Transportgeschwindigkeit V_e des Axensystems und die relative Geschwindigkeit V_r des Beweglichen (38). Die absolute Gesammtkraft F (oder die Resultante der Kräfte welche den materiellen Punct in Wirklichkeit angreifen) zerlegen wir in zwei Composanten; die eine sei die oben erklärte Transportkraft F_e; die andere, welche wir durch F_r bezeichnen, wird dann nach Intensität und Richtung bestimmt sein (207).

Nach dem Lehrsatze in Nr. 257 erhält man die Lage M des Beweglichen nach der Zeit τ (während welcher die Kräfte F, F_e, F_r als constant angenommen werden), wenn man das Polygon ABCDM construirt, dessen Seiten parallel sind mit den als Composanten geltenden Geschwindigkeiten und Kräften, und gleich den Größen

$$V_e\tau, \quad \frac{1}{2}\frac{F_e}{m}\tau^2, \quad V_r\tau, \quad \frac{1}{2}\frac{F_r}{m}\tau^2.$$

Nun wird während dieser Zeit der geometrische Punct A, den man an die Axen gebunden denkt, nach C gerückt sein, wie es mit einem Beweglichen von der Masse m in Folge der Anfangsgeschwindigkeit V_e und der Kraft F_e der Fall gewesen wäre, und die Axen des Systems, welche man im anfänglichen Augenblick durch A gelegt denken kann, haben sich nach C verlegt ohne Aenderung ihrer Richtung (da die Bewegung der Axen translatorisch ist). Dem mit den Axen fortgetragenen Beobachter wird es also scheinen, das Bewegliche sei vom Ursprung C nach M gerückt vermöge der Anfangsgeschwin-

digkeit V_r und der Kraft F_r. Die Kraft F_r ist folglich die scheinbare Gesammtkraft welche bestimmt werden sollte.

259. Die relative Kraft F_r, oder die scheinbare Gesammtkraft bei der relativen Bewegung, läßt sich als Resultante betrachten aus der wirklich bestehenden Gesammtkraft F und einer Kraft $-F_e$ welche der Transportkraft F_e gleich und entgegengesetzt ist. Wenn also bei einer Bewegung solcher Art, wie wir sie für das Vergleichungssystem angenommen haben, der in Nr. 255 erwähnte Beobachter die Resultante F der in Wahrheit thätigen Kräfte kennt, so muß er diese mit der Kraft $-F_e$ zusammensetzen um sich die Bewegung des betrachteten Puncts zu erklären.

260. **Anmerkungen**. — Wäre die Bewegung der Vergleichungsaxen geradlinig und gleichförmig, so würde die Kraft F_e null sein; die relative Bewegung unterschiede sich von der absoluten nur hinsichtlich der Anfangsgeschwindigkeit. Hätte in diesem Falle die Kraft F constante Intensität und Richtung, so würde die im Raume wirklich beschriebene Parabel durch eine andere Parabel vertreten werden, deren Hauptaxe parallel zur Kraft bliebe.

Ist die Kraft F null, und folglich der Punct entweder in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung, während die Bewegung der Axen veränderlich ist, so reducirt sich die scheinbare Kraft F_r auf $-F_e$.

§. 2. Von den scheinbaren Kräften in dem Falle wo die Vergleichungsaxen eine Rotationsbewegung haben.

261. **Aufgabe**. Die scheinbare Kraft zu bestimmen welche der relativen Bewegung eines materiellen Puncts entspricht, wenn das System der Vergleichungsaxen sich gleichförmig um eine feste Axe dreht.

Es sei ω die Winkelgeschwindigkeit des Axensystems, welches sich um die in O projicirte Gerade dreht (Fig. 41); A die Anfangslage des Beweglichen, r seine Distanz von der festen Geraden O.

In dem besondern Falle wo der materielle Punct in relativer Ruhe ist, also blos von der Rotationsbewegung um die Gerade O mitgeführt wird, gilt nothwendig Folgendes:

1) In dem zum anfänglichen genommenen Augenblick hat der materielle Punct die Geschwindigkeit ωr (zum Halbmesser AO senkrecht im Sinne der Bewegung des Systems) erlangt;

2) Derselbe ist unablässig von einer Centripetalkraft $m\omega^2 r$ angegriffen (238), welche die Transportkraft darstellt.

262. Wir wollen nun den Fall betrachten, wo die absolute Bewegung des materiellen Puncts geradlinig und gleichförmig ist, d. h. wo derselbe, nachdem er im Anfangsaugenblick eine gewisse früher erlangte Geschwindigkeit schon besitzt, von keiner Kraft mehr irgend eine Einwirkung erleidet.

Es sei V jene absolute Geschwindigkeit, deren Richtung wir in einer zur festen Geraden O senkrechten Ebene annehmen; und diese Ebene sei die der Figur. Wir zerlegen V in zwei Geschwindigkeiten; die eine sei die Transportgeschwindigkeit $V_e = \omega r$ längs der Tangente AB; die andere Composante ist die relative Geschwindigkeit V_r längs einer Geraden Ax.

Nach einer unendlich kleinen Zeit dt hat der materielle Punct die gerade Strecke AM = Vdt zurückgelegt; er befindet sich am Endpuncte M der gebrochenen Linie ABM, deren eine Seite AB = $\omega r dt$ längs V_e liegt und deren andere Seite MB = $V_r dt$ parallel zu V_r ist.

263. Angenommen, es habe im Anfangs-Augenblick die eine der Vergleichungsaxen die Richtung Ax von V_r. Nach der Zeit dt liegt der Ursprung A in A', wobei für den Bogen AA' der Werth $\omega r dt$ von AB gesetzt werden darf; und die Axe Ax hat die Lage A'x' angenommen, welche mit dem Halbmesser A'O einen Winkel OA'x' = OAx macht, woraus folgt daß der Winkel zwischen den Geraden Ax, A'x' gleich AOA' oder ωdt ist.

Für einen Beobachter, der durch die Rotationsbewegung der Vergleichungsaxen fortgeführt wird, hat der materielle Punct scheinbar eine Curve A'M beschrieben, welche in A' die anscheinend unbewegliche Axe A'x' berührt; denn die Anfangsgeschwindigkeit der relativen Bewegung hat die Richtung Ax, und diese ist in A'x' übergegangen.

Nimmt man auf A'x' eine Länge A'M' = BM, zieht M'N gleich und parallel mit A'B, und verbindet N mit M durch einen Kreisbogen NM aus dem Mittelpuncte B, so hat man

$$A'M' = V_r dt.$$

Der Beobachter, welcher den Uebergang des Beweglichen aus A' nach M für eine absolute Bewegung hält, betrachtet diese Bewegung, nach dem Lehrsatze in Nr. 257, als das Erzeugniß der Anfangsgeschwindigkeit V_r welche für sich allein das Bewegliche durch A'M' geführt hätte, und einer Kraft welche im Stande wäre es in der Zeit dt aus der Ruhe von M' nach M zu schaffen; diese Kraft zerfällt in zwei Composanten, von denen die eine F' das Bewegliche von M' nach N, die andere F'' von N nach M brächte. Die Kräfte F', F'' müßten die Gleichungen

$$M'N = \frac{1}{2}\frac{F'}{m}dt^2, \qquad NM = \frac{1}{2}\frac{F''}{m}dt^2$$

befriedigen. — Da nun M'N = A'B, so kann man, mit einem Fehler der

um so eher zu vernachläßigen ist je kleiner dt wird, für M'N die Projection von BA' auf den Halbmesser AO setzen; und hieraus schließt man, indem der Bogen AA' mit seiner Sehne zusammenfällt:

$$M'N = \frac{AA'^2}{2r} = \tfrac{1}{2}\omega^2 r\, dt^2.$$

Andererseits hat man, weil die Sehne NM auf ihren Bogen fällt und die Winkel MBN, AOA' einander gleich sind:

$$NM : BM = AA' : AO \qquad \text{oder} \qquad NM : V_r dt = \omega r dt : r,$$

also

$$NM = V_r \omega\, dt^2.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke für M'N und NM in den beiden vorigen Gleichungen erhält man die fraglichen Kräfte:

$$F' = m\omega^2 r = m\omega V_e \qquad \text{und} \qquad F'' = 2m\omega V_r.$$

264. Die Resultante der Kräfte F' und F'' ist die gesuchte relative oder scheinbare Kraft.

Die erste Composante F' hat die Intensität der Centripetalkraft (238), welche den beweglichen Punct während der Rotation der Axen in scheinbarer Ruhe zu erhalten vermag; aber sie ist derselben gerade entgegengesetzt, denn der Winkel der Geraden A'B mit dem Halbmesser A'O kann einem flachen so nahe gebracht werden als man nur will. Die Kraft F' besitzt daher die Intensität, die Richtung und den Sinn der Centrifugalkraft (235) welche der Winkelgeschwindigkeit ω, der Masse m und der veränderlichen Distanz r entspricht.

Die zweite Composante F'', deren Intensität $2m\omega V_r$ ist, steht, wie die Sehne NM, senkrecht auf der Richtung A'x' der relativen Geschwindigkeit, und bildet zugleich einen rechten Winkel mit der Rotationsaxe O. Der Sinn in welchem diese Kraft wirkt ist übrigens, wie bei NM, der entgegengesetzte von dem Rotations-Sinne der Geraden Ax welche die Richtung für die scheinbare Geschwindigkeit des beweglichen Puncts angibt.

265. Untersuchen wir jetzt den Fall, wo die Geschwindigkeit V nicht, wie wir (262) angenommen haben, rechtwinkelig zur Rotationsaxe O ist, so kann dieselbe in drei Geschwindigkeiten zerlegt werden; die erste sei V_e längs AB; die zweite U_r in der zur festen Axe O senkrechten Ebene der Figur; die dritte W_r parallel zu dieser Axe, so daß sie sich in A projicirt. (Die zwei zu einander senkrechten Geschwindigkeiten U_r, W_r sind die Composanten der relativen Geschwindigkeit.) Hat die Composante U_r die Richtung Ax und die in Nr. 262 durch V_r bezeichnete Intensität, so wird die Bewegung des materiellen Puncts nur darin vom vorigen Falle verschieden sein, daß jetzt der Punct M der Figur die Projection des Beweglichen auf die Ebene OAx nach der Zeit dt ist;

der materielle Punct selbst aber wird sich von dieser Ebene um die Größe $W_r dt$ entfernt haben, vermöge der Geschwindigkeit W_r und ohne das Einschreiten irgend einer Kraft. Daher werden die zur Ebene OAx parallelen scheinbaren Kräfte F′ und F″ noch die vorigen sein, d. i.

$$F' = m\omega^2 r = m\omega V_e, \qquad F'' = 2m\omega U_r. \qquad [85]$$

266. Ist endlich der materielle Punct von wirklichen Kräften angegriffen welche die Resultante F haben, so erscheint die relative Bewegung als das gemeinschaftliche Ergebniß aus der relativen Anfangsgeschwindigkeit und der Kraft F, welche in jedem Augenblick nach ihrer wahren Richtung zu nehmen und mit den scheinbaren Kräften F′, F″ zu verbinden ist. Vergleicht man nämlich die Lage, welche im gegenwärtigen Falle das Bewegliche nach der Zeit dt einnimmt, mit derjenigen welche stattfände wenn die Kraft F null wäre, so sieht man, daß die Distanz zwischen diesen beiden Lagen, welche die Richtung und den Sinn der Kraft F hat, $\frac{1}{2}\frac{F}{m}dt^2$ beträgt; da aber dieser Werth unendlich klein gegen den Winkel ωdt der Axen Ax, A′x′ ist, so ist es hinsichtlich des Effects der Kraft F nicht möglich, die relative oder scheinbare Aenderung ihrer Richtung während jedes kleinen Zeit-Intervalls in Rechnung zu ziehen, für welches diese Richtung im absoluten Raume als constant angenommen wurde. *)

267. Die vorstehende allgemeinere Theorie wird man leicht bestätigt finden wenn man auf die beiden einfachsten Fälle zurückgeht.

1) *Ist der materielle Punct in relativer Ruhe* (261), so ist die absolute Geschwindigkeit $V = \omega r$. Die wirklich bestehende Kraft ist $F = m\omega^2 r$, im Sinne AO. Da die scheinbare Geschwindigkeit U_r null ist, hat man $F'' = 0$. Daher bleibt für die Zusammensetzung mit der Kraft F nur noch $F' = m\omega^2 r$, im entgegengesetzten Sinne von AO. Die Resultante dieser Zusammensetzung wird null, wie es sein muß.

2) *Ist der materielle Punct in absoluter Ruhe*, so ist die Kraft F null; die relative Geschwindigkeit ist $\omega r = U_r$, dem Sinne nach ent-

*) Diese schöne Theorie stammt von *Coriolis*, und wurde von ihm in der vollen Allgemeinheit bewiesen welche die Infinitesimalrechnung gestattet. In dem oben Mitgetheilten war es um einen elementaren Beweis zu thun, unter Beschränkung auf den einzigen Fall welcher in der Theorie der Maschinen Anwendung findet, nämlich auf die Rotationsbewegung um eine feste Axe.

Die Untersuchungen von Coriolis über diesen Gegenstand sind abgedruckt im *Journal de l'École polytechnique*, cahiers XXI et XXIV.

gegengesetzt der Rotationsbewegung; die Kraft F″ wird $2m\omega^2 r$ und ist längs AO gerichtet; setzt man also diese Kraft mit der Centrifugalkraft $F' = m\omega^2 r$ zusammen, so ergibt sich zuletzt als scheinbare Kraft eine Centripetalkraft $m\omega^2 r$; ein Resultat welches für sich klar ist, da der mit der Rotationsbewegung der Axen entführte Beobachter dem materiellen Puncte eine Kreisbewegung mit der Geschwindigkeit ωr zuschreibt.

268. Der jährliche Umlauf der Erde um die Sonne ist Folge einer Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung welche die Sonne fortwährend auf alle Theilchen der Erde ausübt. Solange sich's um die gewöhnlichen mechanischen Erscheinungen handelt, kann man annehmen, diese Anziehung rufe in jedem Augenblicke parallele Kräfte hervor, welche auf sämmtliche materielle Puncte der Erde proportional zu den Massen derselben wirken; woraus folgt (132), daß man von jener Anziehung ganz absehen kann, ohne daß sich an den von uns beobachteten relativen Bewegungen etwas ändert. Eben so kann man sich die Geschwindigkeit des Erdmittelpuncts hinwegdenken, welche ungefähr 30000 Meter auf die Secunde beträgt; denn dieses Hinwegdenken kommt darauf hinaus, daß man jede wirklich vorhandene Geschwindigkeit mit jener Geschwindigkeit von 30000 M., in entgegengesetztem Sinne genommen, zusammensetzt, wodurch sich die relative Bewegung nicht verändert. Dann gilt aber die Erdaxe, welche in Wahrheit sehr nahe parallel mit sich selbst fortschreitet, als unbeweglich, und der feste Erdkörper bildet ein System das sich gleichförmig um diese Axe dreht.

Die Dauer jeder vollendeten Umdrehung in dieser Rotationsbewegung heißt ein S t e r n t a g (vgl. Nr. 56) und beträgt 86164″, also um 236″ weniger als der mittlere Sonnentag. Man hat daher in diesem Falle

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = \frac{3{,}1416}{43082} = 0{,}000073\ \ldots,$$

woraus folgt, daß für die Geschwindigkeiten V_r, welche wir zu beobachten Gelegenheit haben, die Kraft F″ $\left(= 2m\omega U_r \text{ oder } 2\frac{p}{g}\omega U_r\right)$ gewöhnlich ein sehr kleiner Bruchtheil des Gewichts p ist und vernachläßigt werden kann. Ein bekannter Versuch, bei welchem ihr Einfluß sich kundgibt, besteht darin, daß man einen sehr dichten kugelförmigen Körper aus einer großen Höhe herabfallen läßt, ohne ihm irgend eine Anfangsgeschwindigkeit zu ertheilen; die Stelle des Auffallens liegt, wie man weiß, um eine kleine Distanz östlich vom Fuße der Verticalen welche durch den Ausgangspunct des Körpers geht.

Wird F″ vernachläßigt, so hat man, um die scheinbare Gesammtkraft zu erhalten welche der relativen Bewegung eines materiellen Puncts entspricht,

die reellen Kräfte nur noch mit der Centrifugalkraft F′ zu verbinden. Und so machen wir es in der That indem wir für die Kraft, welche die Gravitation der Erde auf einen Körper übt, diejenige Kraft substituiren die wir das Gewicht dieses Körpers nennen, und welche eigentlich blos die Resultante aus der Anziehungskraft und der Centrifugalkraft ist.

Wenn wir sagen, ein im leeren Raume geworfener Körper sei der Wirkung seines Gewichts überlassen und senke sich in der Zeit t um die Höhe $\frac{1}{2}gt^2$, so liegt in dieser Anbequemung an die äußere Erscheinung eine doppelte Abweichung von der eigentlichen Wahrheit. In Wirklichkeit (und selbst wenn man die Erdaxe als unbeweglich betrachtet) ist die Kraft, welche einen im leeren Raume sich überlassenen Körper angreift, größer als das Gewicht dieses Körpers; aber er durchfällt auch einen größern verticalen Raum als den von uns beobachteten, weil während des Fallens der Ausgangspunct, als geometrischer Punct betrachtet welcher an der Axendrehung der Erde Theil nimmt, selber um ein Gewisses unter die ursprüngliche Horizontalebene herabkommt. Beide Fehler heben sich auf, wie in Nr. 138 im Voraus angezeigt worden ist.

Von hier an werden wir uns wieder, wie früher, an die gewöhnliche Sprechweise halten, bei welcher die Erde als unbeweglich gedacht wird.

269. Berechnung des Einflusses der Erdumdrehung auf die Schwere. — Wir haben soeben gesehen, daß das Gewicht eines Körpers die Resultante aus der Anziehungskraft der Erde und aus der Centrifugalkraft ist. Beschränken wir uns zur Vereinfachung auf den Fall wo der Körper sich am Aequator befindet, so haben diese beiden Kräfte entgegengesetzten Sinn; und wenn A die Anziehung der Erde auf einen Punct bedeutet dessen Masse m und dessen Gewicht am Aequator P ist, hat man

$$P = A - m\omega^2 r,$$

wobei r den Halbmesser des Erdäquators vorstellt.

Nun ist erstlich, wenn T den Sterntag von 86164″ bezeichnet, $\omega = \frac{2\pi}{T}$; zweitens kennt man den Umfang der Erde am Aequator, nämlich $2\pi r = 40070000$ Meter (nahezu, bis auf etwa 1 Kilometer); drittens haben Pendelversuche gelehrt, daß die der Schwere entsprechende Beschleunigung am Aequator 9,78 Meter beträgt; und weil man, wie oben bemerkt, ohne merklichen Fehler die Bewegungserscheinungen als dieselben betrachten kann welche eintreten würden wenn die Erde unbeweglich wäre und dabei die Schwere die nämliche bliebe, so darf man $m = \frac{P}{9{,}78}$ setzen.

Durch Substitution dieser Werthe findet man die Centrifugalkraft

$$m\omega^2 r = \frac{P}{9{,}78} \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{P}{9{,}78} \cdot \frac{40070000}{(86164)^2} \cdot 2\pi = \frac{P}{289};$$

daher $P = A - \frac{P}{289}$, also $P = \frac{289}{290} A = \left(1 - \frac{1}{290}\right) A$;

d. h. die Schwere wird am Aequator durch die Axendrehung der Erde um $\frac{1}{290}$ desjenigen Werthes vermindert, den sie haben würde wenn die Erde blos eine Translationsbewegung besäße.

Anmerkung. Da 290 das Quadrat von 17,03 ist, so müßte bei einer 17,03mal schnelleren Drehung der Erde die Größe $m\omega^2 r$, welche jetzt $\frac{1}{290} A$ beträgt, den Werth A annehmen, und das Gewicht P am Aequator wäre null.

270. Aus den Formeln zu Ende der Nr. 265 lassen sich Folgerungen ziehen, welche für die allgemeine Theorie des Arbeitseffects der Kräfte von Wichtigkeit sind.

Wenn ein materieller Punct, in seiner relativen Bewegung gegen ein rotirendes System betrachtet, von der relativen Anfangsgeschwindigkeit V_r auf eine andere relative Geschwindigkeit v_r übergeht, so ist der Zuwachs

$$\tfrac{1}{2} m v_r^2 - \tfrac{1}{2} m V_r^2$$

der scheinbaren lebendigen Potenz gleich der Summe aus der Arbeit der wirklichen Kräfte und der Arbeit der Kräfte F′, F″, so berechnet als ob die relative Bewegung eine absolute wäre. Da nun die Kraft F″ stets senkrecht zur scheinbaren Geschwindigkeit bleibt, so ist ihre Arbeit null; während die Arbeit der Centrifugalkraft F′, deren Richtung immer in die Verlängerung des Halbmessers fällt, das Integral

$$\int_{r_0}^{r_1} m\omega^2 r \, dr \qquad \text{oder} \qquad \tfrac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_0^2)$$

ist, indem man nämlich ω constant voraussetzt und durch r_0, r_1 die erste und die letzte Distanz des Beweglichen von der festen Rotationsaxe bezeichnet.

Dieß ist die Größe welche man zur Arbeit der wirklich thätigen Kräfte addiren muß, um den Lehrsatz vom Effect der Arbeit auf einen materiellen Punct anwenden zu können den man in relativer Bewegung gegen ein starres, um eine feste Axe rotirendes geometrisches System betrachtet.

271. Der in Obigem liegende sehr brauchbare Satz, welcher sich leicht in Worten aussprechen läßt, kann auf folgende Weise direct bewiesen werden.

Wir denken uns einen materiellen Punct, welcher vermöge der erlangten Geschwindigkeit V, und ohne daß irgend eine Kraft noch thätig ist, fortschreitet, folglich eine geradlinige gleichförmige Bewegung hat; und diese Bewegung beziehen wir auf ein starres geometrisches System, welches sich mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine Axe dreht.

Es sei O (Fig. 42) die Projection der Axe auf die Ebene der Figur; A und M seien die Projectionen zweier Lagen des Beweglichen; die Distanzen AO, MO bezeichnen wir, wie vorhin, durch r_0 und r_1. Die absolute Geschwindigkeit V, deren Projection die Richtung AM hat, kann in zwei Geschwindigkeiten zerlegt werden, von denen die eine U in MA, die andere W senkrecht zur Ebene der Figur liegt.

Am Puncte A ist die scheinbare Geschwindigkeit V_r die Resultante aus V und ωr_0, letztere Composante im entgegengesetzten Sinne der Bewegung genommen; sie läßt sich also erhalten indem man $-\omega r_0$ mit U, und dann die Resultante dieser beiden mit W zusammensetzt. Bezeichnet man daher durch α den Winkel der AM mit der Tangente AB im Sinne der Rotation, so hat man

$$V_r^2 = U^2 + \omega^2 r_0^2 - 2U\omega r_0 \cos\alpha + W^2$$

oder

$$V_r^2 = V^2 + \omega^2 r_0^2 - 2U\omega k,$$

wo k das Loth aus O auf AM ist.

Am Puncte M befriedigt aus gleichen Gründen die scheinbare Geschwindigkeit v_r die Gleichung

$$v_r^2 = V^2 + \omega^2 r_1^2 - 2U\omega k.$$

Folglich hat man (durch Subtraction):

$$v_r^2 - V_r^2 = \omega^2 (r_1^2 - r_0^2)$$

oder

$$\tfrac{1}{2} m v_r^2 - \tfrac{1}{2} m V_r^2 = \tfrac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_0^2).$$

Es ist klar, daß, wenn der materielle Punct von wirklichen Kräften getrieben wäre, man deren Arbeit zur rechten Seite der Gleichung addiren müßte.

272. Erste Anwendung. — Eine enge Röhre von beliebiger Form dreht sich gleichförmig um eine verticale Axe (Fig. 43). In die obere Mündung A wird ein kleiner Körper eingeführt, wozu erforderlich ist daß man ihm zuvor die Geschwindigkeit dieser Mündung ertheile; ferner gibt man dem Körper eine relative Anfangsgeschwindigkeit V_r in Beziehung auf die Röhre. Von seinem Eintritt an wirkt auf den Körper die Schwere und der Druck der Röhre, und unter diesen Umständen sinkt er nach B herab. Man verlangt für den Punct B die relative Geschwindigkeit v_r des Körpers und

seine absolute Geschwindigkeit v im Raume, unter der Voraussetzung, daß die Röhre durchaus keine Reibung darbiete und mithin ihre Einwirkung auf das Bewegliche keinerlei Arbeit erzeuge.

Wir bezeichnen die horizontalen Halbmesser AA′, BB′ durch r_0, r_1; die Höhe A′B′ durch h.

1) Für die Bestimmung der relativen Geschwindigkeit v_r hat man

$$\frac{1}{2} mv_r^2 - \frac{1}{2} mV_r^2 = mgh + \frac{1}{2} m\omega^2 (r_1^2 - r_0^2),$$

indem mgh die aus der Schwere entspringende Arbeit ist. Hieraus folgt

$$v_r^2 = V_r^2 + 2gh + \omega^2 (r_1^2 - r_0^2),$$

oder

$$v_r^2 = V_r^2 + 2gh + v_e^2 - V_e^2,$$

wenn v_e, V_e die Geschwindigkeiten ωr_1, ωr_0 für die Puncte B, A der Röhre bezeichnen.

2) Die absolute Geschwindigkeit v ist die Resultante aus v_r und der Geschwindigkeit v_e oder ωr_1 des Punctes B; wobei zu bemerken, daß die Richtung von v_r die Tangente der Röhre in B ist, die Richtung von ωr_1 aber eine Senkrechte auf A′B′B im Sinne der Drehung.

273. Zweite Anwendung. — Eine kleine Kugel gleitet längs eines sehr dünnen horizontalen Stabes welcher sie durchbohrt, und welchem man eine gleichförmige Rotationsbewegung um einen seiner Puncte ertheilt. Man soll die Bewegung der Kugel bestimmen, indem man diese wie einen materiellen Punct betrachtet und die Reibung auf dem Stäbchen vernachläßigt.

Es sei ω die constante Winkelgeschwindigkeit des Stabs, x die Distanz der Kugel von der Rotationsaxe in einem beliebigen Augenblick, x_0 diese Distanz im Anfangsaugenblick, V und V_0 die relativen Geschwindigkeiten der Kugel auf dem Stabe für die nämlichen Augenblicke.

Auf die relative Bewegung der Kugel längs des Stabes läßt sich die Gleichung des Arbeitseffects anwenden, wenn man nur zu den wirklichen Kräften noch eine in die Richtung des Stabes fallende Centrifugalkraft $F'' = m\omega^2 x$ fügt.

Die wirklich vorhandenen Kräfte, nämlich die Schwere und der Druck des Stabs, sind senkrecht zu dem relativen Weg; ihre Arbeit in der relativen Bewegung ist null. Die Gleichung reducirt sich daher auf

$$V^2 - V_0^2 = \omega^2 x^2 - \omega^2 x_0^2.$$

Die Größen ωx und ωx_0 sind die absoluten Geschwindigkeiten für diejenigen Puncte des Stabes, welche der Mittelpunct der Kugel in den beiden betrachteten Augenblicken einnimmt. Sind nun die gegebenen Größen von der Art, daß im Anfangsaugenblick $\omega x_0 = V_0$, so geht obige Gleichung über

in $V = \omega x$, d. i. die relative Geschwindigkeit V und die Transportgeschwindigkeit ωx sind dann immer einander gleich; und da beide einen rechten Winkel bilden, so folgt, daß die absolute Geschwindigkeit in jedem beliebigen Augenblick einen Winkel von 45° mit derjenigen Richtung macht welche der Stab im nämlichen Augenblicke hat.

274. Man kann fragen, welche Relation zwischen der Distanz x und der zugehörigen Zeit t bestehe. Setzt man in der Gleichung $V = \omega x$, welche sich auf den besondern Fall bezieht wo $V_0 = \omega x_0$ ist, $\frac{dx}{dt}$ für V, so erhält man $dt = \frac{dx}{\omega x}$, und durch Integration (GL. 288):

$$t = \frac{2{,}3026}{\omega} \log \frac{x}{x_0};$$

also kann x_0 nie völlig null sein.

Es sei z. B. $x_0 = 0^m{,}001$; $x = 1^m$; $\omega = 1$; so kommt

$$t = 3 \,.\, 2{,}3026 = 6'',9078.$$

Geht man von der allgemeinen Gleichung $V^2 - V_0^2 = \omega^2 (x^2 - x_0^2)$ aus, und substituirt $V = \frac{dx}{dt}$, so findet man

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}},$$

und wenn man (GL. 291) von x_0 bis x integrirt:

$$t = \frac{2{,}3026}{\omega} \log \frac{\omega x + \sqrt{\omega^2 x^2 + V_0^2 - \omega^2 x_0^2}}{\omega x_0 + V_0}.$$

275. Um die Gleichung der Curve zu erhalten welche der Mittelpunct der Kugel in seiner absoluten Bewegung beschreibt, hat man zu beachten, daß, wenn der Stab zu Ende der Zeit t mit seiner Anfangsrichtung einen durch den Bogen α gemessenen Winkel einschließt, die Gleichung $\alpha = \omega t$ oder $t = \frac{\alpha}{\omega}$ besteht; und indem man diesen Werth von t dem vorhergegangenen Ausdrucke gleichsetzt, hat man die gesuchte Gleichung in Polarcoordinaten x, α.

Dritter Abschnitt.

Allgemeine Lehrsätze über die Bewegung und das Gleichgewicht eines materiellen Systems; oder Dynamik und Statik beliebiger Körper.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Dynamik, oder Lehrsätze über die Bewegung eines beliebigen materiellen Systems.

§. 1. Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung.

276. Die Theorie der Bewegung eines materiellen Puncts läßt sich auf die Bewegungsgesetze beliebiger Körper ausdehnen, und zwar mit Hülfe des Princips, daß jeder Wirkung eine gleiche Gegenwirkung entspricht (235). Es ist deßhalb vor Allem nöthig, den Sinn dieses Princips noch bestimmter anzugeben.

Die Körper sind Aggregate oder Systeme von materiellen Puncten. An einem solchen System sind immer zwei Arten von Kräften in Thätigkeit, mag das System in Ruhe oder in Bewegung sich befinden. Die Kräfte der einen Art sind äußere, und werden entweder durch die Schwere hervorgerufen oder durch die Nachbarschaft (bisweilen durch die Berührung) von Körpern welche nicht zu dem betrachteten System selbst gehören. Die Kräfte der andern Art sind die wechselseitigen Wirkungen welche die materiellen Puncte des Systems selbst aufeinander ausüben. Nimmt nämlich eines dieser Elemente, dessen Masse durch m' bezeichnet ist, eine Kraftäußerung von Seite eines andern Elements in Empfang welches die Masse m'' hat, und stellen

wir diese Kraft durch $f'_{''}$ vor,*) so empfängt ebenso das Element m'' vom Element m' eine Kraft $f''_{'}$. Das Princip um welches sich's hier handelt besteht nun in Folgendem:

1) Die Richtungen jener beiden Kräfte liegen in der Geraden welche die beiden Puncte (Elemente) verbindet;

2) beide Kräfte haben die nämliche Intensität;

3) sie sind dem Sinne nach entgegengesetzt, wirken also beide anziehend oder beide abstoßend.

277. Von den Gesetzen dieser innern Kräfte in materiellen Systemen ist nichts weiter bekannt als die erwähnte Gleichheit der wechselseitigen Wirkungen.

Die Beobachtung der Ausdehnung und Zusammenziehung der Körper in Folge von Temperaturveränderungen hat auf die Ansicht geführt, die Körper seien zusammengesetzt aus Atomen oder untheilbaren Elementen; diese Atome denkt man sich nach gewissen Verhältnissen gruppirt, von denen die chemische Beschaffenheit abhängt, und durch Zwischenräume getrennt, welche sich ändern mit dem Wärmegrade, mit den äußern Kräften, und jenachdem die Elemente in relativer Ruhe oder in Vibration sind.

Von der Art wie die Elemente der Körper aufeinander wirken, erlangt man, nach Poncelet's Erklärung (Méc. indust., p. 256—264), eine ziemlich einleuchtende Vorstellung mittels folgender Doppel-Hypothese. Man nimmt an, das Gesetz der allgemeinen Gravitation erstrecke sich auch auf die kleinsten Theile der Materie, so daß diese sich um so stärker anziehen je näher sie sich kommen; zugleich aber bestehe zwischen zwei benachbarten Massentheilchen eine abstoßende Kraft, welche von der Wärme oder von ähnlichen andern Ursachen abhängt, und welche mit der Entfernung sich ändert, jedoch nach einem andern Gesetze als die Gravitation.

Demnach wäre jede von den Kräften, die wir durch $f'_{''}$ und $f''_{'}$ bezeichnet haben, die Differenz oder Resultante zweier Kräfte, nämlich:

1) der wechselseitigen Gravitation zwischen den beiden Elementen denen die Massen m' und m'' zugehören;

2) der wechselseitigen Abstoßung in Folge von Ursachen welche der Wärme analog sind.

Diese Resultante würde sich anziehend oder abstoßend verhalten oder null sein, jenachdem die erste Kraft an Intensität über oder unter der zweiten oder ihr gleich stände.

278. Diese Begriffe wollen wir nun auf zwei materielle Puncte anwenden, welche wir fortwährend durch die Buchstaben m', m'' bezeichnen.

---

*) Die Bezeichnung $f'_{''}$ soll die Worte vertreten: Kraft welche m' von m'' empfängt.

Nehmen wir zuerst an, diese Körperchen seien in Ruhe ohne daß irgend eine äußere Kraft auf sie wirkt, so sind für diesen Fall die wechselseitigen Kräft $f'_{''}$ und $f''_{'}$ null; dieß hindert aber nicht, daß die gegenseitige Gravitation beider Puncte und ihre durch Wärme od. dgl. verursachte Abstoßung dennoch sehr beträchtlich sein könnte in Rücksicht auf die Massen der Elemente m' und m'', wenn diese nah genug beisammen liegen.

Die Ruhe der beiden Körper kann aber auch unter dem Einflusse zweier äußern Kräfte F', F'' stattfinden, welche entweder auf gegenseitige Annäherung oder Entfernung der Körper hinwirken. In diesem Falle kann der materielle Punct m', für sich betrachtet, nur dadurch in Ruhe verbleiben daß er außer der äußern (d. i. nicht aus dem Puncte m'' entspringenden) Kraft F. noch von m'' eine Kraft $f'_{''}$, gleich und entgegengesetzt der F', aufnimmt, Ebenso erfordert das Gleichgewicht des Puncts m'', daß die Kraft F'' gleich und entgegengesetzt der Molecularwirkung $f''_{'}$ sei (d. h. der Kraft welche m'' von m' empfängt). Gibt man nun das Princip der gleichen Wechselwirkung zu, d. i. die Gleichheit der Intensitäten und den Gegensatz der Richtungen beider wechselseitigen Kräfte $f'_{''}$ und $f''_{'}$, so muß man schließen, daß F' und F'' nothwendig gleiche und entgegengesetzte Kräfte sind. Wollte man dagegen lieber als ausgemacht annehmen, daß das Gleichgewicht der in Wechselbeziehung gedachten Elemente m', m'' die Gleichheit der entgegengesetzten Kräfte F', F'' verlangt, so würde man daraus auf die Gleichheit der wechselseitigen Molecularkräfte schließen. — Wenn die Kräfte F', F'' die Puncte m', m'' einander zu nähern suchen, so wirken die ihnen gleichen Kräfte $f'_{''}$, $f''_{'}$ abstoßend, d. h. nach der oben ausgesprochenen Hypothese (277) ist dann die Gravitation schwächer als die Abstoßung welche aus den der Wärme ähnlichen Ursachen erfolgt. Vergleicht man nun das Verhalten beider Puncte zu einander mit ihrem Verhalten im ersten Falle, wo sie in Abwesenheit der Kräfte F', F'' im Gleichgewichte waren, so wird man zur Erklärung des zweiten Zustandes sagen müssen, daß durch die Annäherung der Puncte m', m'' ihre wechselseitige Gravitation sich allerdings vermehrt, ihre Abstoßung aber noch beträchtlicher zunimmt. Das Gegentheil würde stattfinden, wenn die äußern Kräfte F', F'' bestrebt wären die beiden Puncte von einander zu entfernen. Es kann geschehen, daß eine sehr geringe Aenderung in der Distanz beider Puncte eine sehr große Aenderung in der Intensität ihrer wechselseitigen Wirkung hervorbringt. Hieraus wird der innere Bau der festen Körper begreiflich. Dadurch nämlich, daß bei sehr kleinen Formveränderungen die wechselseitigen Wirkungen bedeutend zunehmen, können solche Körper, innerhalb gewisser Grenzen, ohne merkliche Aenderung der Gestalt den äußern Einwirkungen widerstehen welche sie zu dehnen oder zusammenzudrücken streben.

279. Wäre es möglich, ein Aggregat materieller Puncte, welche einen festen Körper bilden, im Zustande der Ruhe vollkommen zu isoliren oder jeden Einfluß irgend einer äußern Kraft abzuschneiden, so dürfte man hieraus noch nicht schließen, daß nunmehr die wechselseitigen Wirkungen zwischen sämmtlichen Elementen null seien, wie im ersten Falle der vorigen Nummer. Jeder dieser Puncte könnte auch aus dem Grunde in Ruhe sein, weil die Kräfte, welche er von den andern Theilen des Systems empfängt, theils anziehende theils abstoßende sind und ihre Resultante null ist. Um diese Bemerkung an einem sehr einfachen Beispiele zu erläutern, denken wir uns ein System von vier gleichen materiellen Puncten m', m'', m''', m^{IV} welche die Eckpuncte eines Quadrats bilden.

Damit Gleichgewicht bestehe ohne die Thätigkeit irgend einer äußern Kraft, genügt daß die Resultante der Kräfte null sei, welche jeder Punct von den drei andern empfängt; sind also die Kräfte $f'_{''}$, f'_{IV}, welche der Punct m' von seinen beiden nächsten Nachbarn m'' und m^{IV} aufnimmt, abstoßend in Folge des Ueberwiegens der Wärmewirkung über die Gravitation, so muß dagegen die Kraft $f'_{'''}$, deren Richtung in die Diagonale fällt, anziehend sein, d. h. zwischen den Puncten m' und m''' behält die Gravitation die Oberhand über die Abstoßung durch die Wärmethätigkeit.

Nun wollen wir aber annehmen, die beiden sich diagonal gegenüberliegenden Puncte m', m''' seien von zwei gleichen und entgegengesetzten äußern Kräften F', F''' angegriffen, welche die Puncte einander zu nähern suchen. Soll unter diesen Umständen noch Ruhe stattfinden, so muß nicht nur die Diagonale $m'm'''$ kleiner, sondern auch die andere Diagonale $m''m^{IV}$ größer sein als im vorigen Falle. Der Punct m'' nämlich, welcher keiner äußern Kraft ausgesetzt ist, soll noch im Gleichgewicht bleiben unter der Einwirkung der Kräfte welche von den drei Puncten m', m''', m^{IV} ausgehen; bliebe nun die Entfernung $m''m^{IV}$ ungeändert, so würden die ursprünglichen Abstoßungskräfte zwischen m'' und m' einerseits und zwischen m'' und m''' andererseits sich vergrößert haben, weil die Distanzen $m''m'$, $m''m'''$ kleiner geworden wären; überdieß hätte der Winkel $m'm''m'''$ abgenommen; mithin würde aus doppeltem Grunde die Resultante jener beiden Abstoßungskräfte zugenommen haben, während die anziehende Kraft zwischen m'' und m^{IV} die nämliche geblieben wäre; also könnte kein Gleichgewicht stattfinden; und folglich muß zur Ausgleichung die Diagonale $m''m^{IV}$ wachsen, wodurch die größere der erwähnten ungleichen Kräfte ab- und die kleinere zunimmt.

Eine Umgestaltung entgegengesetzter Art würde stattfinden, wenn die beiden äußern Kräfte bestrebt wären ihre Angriffspuncte m', m''' von einander zu entfernen; damit Gleichgewicht bestehen könne, müßten die beiden andern Puncte m'', m^{IV} näher zusammenrücken. Dieß bestätigt die Erfahrung; ein cylindrischer Draht oder Faden, den man verlängert, vermindert zugleich seinen Durchmesser.

280. Die obigen hypothetischen Betrachtungen (Nr. 277—279) haben blos deßhalb hier Platz gefunden, damit man sich eher vorstellen könne, in welcher Art die materiellen Elemente der Körper aufeinander wirken.

Wollte man übrigens jene Hypothesen nicht gelten lassen, so würde dieß keineswegs die Wahrheiten beeinträchtigen welche im vorliegenden Abschnitte entwickelt werden sollen; denn diese folgen mit Nothwendigkeit aus dem einzigen Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, verbunden mit den Lehrsätzen der Dynamik des materiellen Puncts.

Diese Wahrheiten finden Anwendung auf alle denkbaren Körper, d. h. auf jedes beliebige Aggregat materieller Puncte. Die organischen Körper, ja selbst die animalischen Wesen, sind dabei nicht ausgenommen, da ihre materiellen Elemente ebenso, wie bei den Körpern des Mineralreichs, die Eigenschaft der Trägheit besitzen, und ihren Zustand in Bezug auf Ruhe oder Bewegung nur in Folge von Kräften ändern. Diese Kräfte haben auch hier ihren Ursprung theils außerhalb des durch jene Elemente gebildeten Körpers, theils sind sie wechselseitige innere Kräfte, deren eigentliche Natur — schon so geheimnißvoll in den unorganischen Körpern — vollens räthselhaft bei den thierischen Wesen erscheinen. Für unsern Zweck begnügen wir uns mit der Bemerkung, daß die mechanische Wirkung des Willens und des instinctiven Lebens auf die materiellen Elemente animalischer Körper in den Aenderungen eben jener wechselseitigen innern Kräfte besteht.

281. Die Lehrsätze, welche in den folgenden vier Paragraphen festgestellt werden, beziehen sich auf ein beliebiges materielles System von mehr oder weniger veränderlicher Gestaltung, wie es bei den von der Natur uns dargebotenen Systemen der Fall ist.

Sind einzelne Elemente des Systems unter sich durch Fäden oder starre Stäbe verbunden, so begründet dieß keine Ausnahme hinsichtlich der Eintheilung sämmtlicher Kräfte in äußere und wechselseitige innere. Denn man kann die Bänder mit in das materielle System einbegreifen, indem man sie als Gebilde aus aneinanderliegenden materiellen Puncten ansieht, zwischen denen wechselseitige Kräfte wirken; nur wird man, wo es angeht, zur Vereinfachung der Rechnungen die Masse dieser Bänder vernachläßigen. — Wenn gewisse Puncte des Systems sich auf der Oberfläche eines dem Systeme fremden Körpers bewegen, so sind die Rückwirkungen dieser Oberfläche (oder vielmehr des Körpers den sie begrenzt) äußere Kräfte für das System welchem der Körper nicht angehört. Diese Rückwirkungen würden normal sein, wenn die Oberfläche gar keine Reibung darböte; beim Fortgleiten eines Körpers auf einem andern, der seine Bewegung modificirt, findet sich aber jene Annahme niemals verwirklicht.*)

*) Carnot sagt (Principes de l'équil. et du mouv., p. 237): „Feste Puncte und

§. 2. Allgemeiner Lehrsatz von der Bewegungs-Größe eines materiellen Systems.

282. Ein System zweier elementarer Körper, welche wechselseitig aufeinander wirken, sei in Bewegung. Wir bezeichnen diese Körper, und insbesondere ihre Massen, durch m′, m″. Der erste wird von äußern Kräften angegriffen, deren Resultante F′ ist; eine andere Resultante F″ wirkt auf den zweiten Körper. Außerdem übt m″ auf m′ eine Kraft $f'_{,,}$, und m′ auf m″ die gleiche aber entgegengesetzte Kraft $f''_{,}$, wobei die Entfernung der beiden materiellen Puncte wechseln oder constant bleiben mag. Es seien v'_0, v''_0 die Geschwindigkeiten von m′ und m″ im Anfangsaugenblick; v′, v″ ihre Geschwindigkeiten nach Ablauf einer gewissen Zeit t. Endlich sollen durch F'_x, F''_x, $f'_{,,x}$, $f''_{,x}$, v'_{0x}, v''_{0x}, v'_x, v''_x die Projectionen dieser Kräfte und dieser Geschwindigkeiten auf eine beliebige Axe Ox bezeichnet sein.

Jeder der Körper m′, m″ gibt, für sich betrachtet, eine Gleichung für den Effect des Antriebs (211, 2), sowohl wenn die Kräfte sich ändern als wenn sie constant bleiben; nämlich

$$m'v'_x - m'v'_{0_x} = \int F'_x dt + \int f'_{,,x} dt$$

$$m''v''_x - m''v''_{0_x} = \int F''_x dt + \int f''_{,x} dt.$$

Nun sind $f'_{,,x}$ und $f''_{,x}$ in jedem Augenblick die auf die nämliche Axe bezogenen Projectionen zweier gleichen Kräfte von entgegengesetztem Sinn, folglich gleich aber im Zeichen verschieden; und das nämliche gilt für die beiden betreffenden Integrale; daher erhält man durch Addition der vorstehenden Gleichungen

$$(m'v'_x + m''v''_x) - (m'v'_{0x} + m''v''_{0x}) = \int F'_x dt + \int F''_x dt.$$

„jegliche Art von Hindernissen sind rein passive Kräfte, welche die größte Bewegung „absorbiren können, aber niemals auch nur die kleinste Bewegung an einem ruhen-„den Körper hervorzurufen vermögen." Abgesehen davon, wie sonderbar heutzutage die Redensart, *ein fester Punct sei eine Kraft*, für uns klingt — erscheint der Ausdruck *passive Kraft* als eine Verknüpfung zweier sich widersprechender Bezeichnungen; denn eine Kraft, welche eine Bewegung hindert oder vernichtet, *wirkt* oder ist *activ*, ebensogut wie eine andere, welche diese Bewegung hervorzubringen strebt oder hervorgebracht hat. Um den Gedanken *Carnot's* wiederzugeben, würde man richtiger sagen, die von einem festen Hinderniß ausgeübte Kraft ist immer eine widerstehende Kraft (75). Vielleicht ist es Nachahmung jenes gelehrten Geometers, daß mehrere Schriftsteller den Namen *passive Widerstände* gebrauchen, für solche welche aus der Reibung, aus der Steifheit der Seile ꝛc. entspringen.

Dieses Resultat läßt sich in folgenden Worten geben.

Lehrsatz. Der Zuwachs der Summe aus den auf eine beliebige Axe projicirten Bewegungs-Größen ist 1) gleich der Summe aus den auf die nämliche Axe projicirten Antrieben der äußern Kräfte, und 2) unabhängig von den wechselseitigen (innern) Wirkungen.

Dieser wichtige Satz wird ganz in derselben Weise für eine beliebige Anzahl materieller Puncte bewiesen.

Bei vier Puncten hat man folgende Gleichungen anzusetzen:

$$m'v'_x - m'v'_{0x} = \int (F'_x + f'_{,,x} + f'_{,,,x} + f'_{IVx})\, dt$$

$$m''v''_x - m''v''_{0x} = \int (F''_x + f''_{,x} + f''_{,,,x} + f''_{IVx})\, dt$$

$$m'''v'''_x - m'''v'''_{0x} = \int (F'''_x + f'''_{,x} + f'''_{,,x} + f'''_{IVx})\, dt$$

$$m^{IV}v^{IV}_x - m^{IV}v^{IV}_{0x} = \int (F^{IV}_x + f^{IV}_{,x} + f^{IV}_{,,x} + f^{IV}_{,,,x})\, dt.$$

Die zwölf Kräfte $f'_{,,}$, $f''_{,}$; $f'_{,,,}$, $f'''_{,}$; f'_{IV}, $f^{IV}_{,}$; $f''_{,,,}$, $f'''_{,,}$; .... sind paarweise gleich und von entgegengesetztem Sinne; ihre Projectionen sind gleich, aber von verschiedenem Zeichen; daher gibt die Addition

$$\Sigma\, mv_x - \Sigma\, mv_{0x} = \Sigma \int_0^t F_x dt. \qquad [86]$$

Die Uebersetzung dieser Gleichung in Worten lautet wie vorhin.

§. 3. Allgemeiner Lehrsatz von der Bewegung des Schwerpuncts eines Systems.

283. Bezeichnet man durch u_0 die Geschwindigkeit des Schwerpuncts eines Systems im Anfangs-Augenblick, durch u den Werth den diese Geschwindigkeit nach der Zeit t erhält, und behält im Uebrigen die Bezeichnungen von Nr. 282 bei, so hat man (nach der in Nr. 102 bewiesenen Eigenschaft des Schwerpuncts):

$$\Sigma mv_x = u_x \Sigma m, \qquad \Sigma mv_{0x} = u_{0x} \Sigma m.$$

Die Formel [86] der vorigen Nummer gibt daher

$$u_x\, \Sigma m - u_{0x}\, \Sigma m = \Sigma \int_0^t F_x dt. \qquad [87]$$

Da diese Gleichung für jede beliebig gewählte Projectionsaxe stattfindet, so folgt, daß die Abänderungen der Geschwindigkeit des Schwerpuncts nach Intensität und Richtung weder von der wechselseitigen Einwirkung der materiellen Puncte des Systems abhängt, noch von dem Auseinandergehen oder Zusammenrücken dieser Puncte. Vergleicht man endlich die Formel [87] mit der für einen materiellen Punct geltenden Gleichung [57] in Nr. 211, so erkennt man die Richtigkeit des folgenden Satzes.

Lehrsatz. Der Schwerpunct eines beliebigen Systems bewegt sich wie ein materieller Punct, welcher die Gesammtmasse Σm aller Puncte des Systems in sich vereinigt, und in welchen man die äußern Kräfte durch parallele Verschiebung verlegt hat.

Dieser sehr wichtige Satz ist als das Princip von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung bezeichnet worden. Er ist aber eigentlich kein Princip; er ist ein Lehrsatz.

284. Demnach hängen die Abänderungen in der Bewegung des Schwerpuncts für einen Körper oder für ein beliebiges System von Körpern blos von der Resultante der äußern Kräfte ab, welche man sich zuvor parallel mit ihren ursprünglichen Richtungen in diesen Punct verlegt denkt; und diese eingebildete Kraft, deren Betrachtung von wesentlichem Nutzen ist, verdient einen besondern Namen. Wir nennen sie **Translations-Resultante**, und verstehen also unter diesem Ausdrucke diejenige Kraft, welche man als Resultante beliebig gegebener Kräfte erhalten würde, nachdem man dieselben, behufs der Zusammensetzung, parallel mit sich selbst und unter Beibehaltung ihres ursprünglichen Sinnes nach einem gemeinsamen Angriffspuncte verschoben hätte.

285. Aus dem Lehrsatze in Nr. 283 folgt, daß die im zweiten Abschnitt abgehandelte allgemeine Theorie der Bewegung eines materiellen Puncts unter der Wirkung beliebiger Kräfte sich ohne irgend eine Ausnahme auf die Bewegung des Schwerpuncts jedes materiellen Systems übertragen läßt, wenn man sich nur die Gesammtmasse des Systems im Schwerpunct concentrirt und alle äußern Kräfte nach diesem Puncte verlegt denkt.

Also ist die Eigenschaft der Trägheit (58) auch an jedem materiellen Systeme vorhanden, so nämlich, daß sein Schwerpunct sich aus der Ruhe nicht in Bewegung setzen, oder, falls er schon eine Geschwindigkeit hat, diese weder der Größe noch der Richtung nach ändern kann, wenn nicht eine oder mehrere äußere Kräfte auf einen oder auf mehrere Puncte des Systems einwirken. In Abwesenheit solcher Kräfte verbleibt der Schwerpunct entweder

in Ruhe oder in der vorgängig erlangten gleichförmigen geradlinigen Bewegung, und die wechselseitigen innern Kräfte haben keinen andern Erfolg, als daß sie die Gestalt des Systems ändern, falls dieses nicht starr ist, oder daß sie Rotationsbewegungen hervorrufen. Dieß will man zusammenfassend andeuten, wenn man von der Erhaltung der Schwerpuncts-Bewegung spricht.

Die Fähigkeit der Thiere und Menschen, sich willkürlich von der Stelle zu bewegen, macht keine Ausnahme von obiger allgemeinen Regel. Die Zusammenziehung der Muskeln entspringt aus wechselseitigen Kräften (280), welche für sich allein den Schwerpunct nicht in Bewegung zu setzen vermöchten; die Schwere könnte ihn blos vertical herabziehen; aber die Rückwirkung derjenigen Körper, gegen welche die animalischen Wesen bei ihren Bewegungen sich anstemmen, erweckt äußere Kräfte, in deren Folge der Schwerpunct nach allen möglichen Richtungen verrückt werden kann.

Auf einer vollkommen glatten Horizontalebene ohne Reibung (also auf einer Ebene mit blos verticaler Rückwirkung) — wenn eine solche Ebene überhaupt möglich wäre — würde ein Thier vergebliche Anstrengungen machen um eine Bewegung seines Schwerpuncts in horizontalem Sinne herbeizuführen oder abzuändern. *)

*) Bei Carnot (Principes de l'équil. et du mouv., p. 51) findet sich die Stelle: „Wir sehen allerdings Geschöpfe welche sich nach eigener Willkür bewegen; aber in „diesen wohnt ein Lebensprincip, von dem wir hier Umgang nehmen; oder sie „werden auch wohl von äußern Ursachen mit fortgenommen, welche die Erfahrung „kennen lehrt, wie die Schwere rc."

Denselben Gedanken spricht D'Alembert aus (Traité de dynamique, Discours prélim., p. XXV), indem er sagt: „Die unausgesetzte Erfahrung von den Bewegungen unseres Körpers beweis't uns zur Genüge, daß die Materie unter der Botmäßigkeit eines Vernunft-Willens sich anders bewegen kann als wenn sie sich selbst „überlassen ist."

Es ist nicht wohl anzunehmen, daß diese Autoren hätten sagen wollen, wir könnten unsern Schwerpunct in Bewegung setzen ohne Dazwischenkunft äußerer Kräfte; denn dieß wäre ein Irrthum. Allerdings liegt es in unserer Macht, diese Kräfte in's Dasein zu rufen, indem wir uns auf unsere Umgebungen stützen; unser Wille aber entwickelt in unserem Körper keine anderen Kräfte als wechselseitige Wirkungen.

Ein gründlicher Mathematiker †) hat vor nicht langer Zeit gesagt (Compte rendu de l'Académie des sciences, 14 juillet 1845): „Es steht nicht in unserer Gewalt, „den verticalen Druck aufzuheben, welchen das Gewicht unseres Körpers auf den „Boden ausübt der uns trägt; dagegen rufen wir nach unserm Belieben den horizontalen Druck hervor, der von unserer Hand gegen ein Hinderniß ausgeübt wird „welches uns im Wege steht und das wir beseitigen, oder gegen einen Fensterladen „welchen wir schließen. Dieser Druck ist eine physische Kraft, über welche wir offenbar „verfügen; und beim Schwimmen, beim Gehen, beim Laufen rc. beeifern sich — so „zu sagen — solche Kräfte, die Befehle auszuführen welche unser Wille ihnen vorschreibt."

†) Cauchy (Mém. sur les secours que les sciences de calcul peuvent fournir aux sciences physiques). d. Ü.

286. Der Lehrsatz von der Bewegung des Schwerpuncts findet sich verwirklicht in folgenden Beispielen.

1) Wenn eine aufgeworfene Bombe im Raume platzt, so verfolgt der Schwerpunct, so lange die Trümmer nicht auf andere Körper treffen, seinen Weg gerade so, wie wenn die Bombe ganz geblieben wäre; doch werden durch den Luftwiderstand wesentliche Modificationen herbeigeführt.

2) Wenn ein Mensch im Herabfallen von einer hochgelegenen Stelle auch heftige Bewegungen macht, beschreibt sein Schwerpunct (dessen relative Lage gegen den Körper selbst sich ändert, je nach den verschieden gegenseitigen Stellungen der Glieder) eine Curve welche blos abhängt von der Anfangsgeschwindigkeit, von der Wirkung der Schwere und vom Widerstande der Luft. Ohne diesen Widerstand würde die Bahn des Schwerpuncts eine Verticale oder eine Parabel sein. Wirft dieser Mensch in der Luft einen Gegenstand horizontal von sich, welchen er beim Fallen mitgeführt hatte, so kann dadurch der Ort, wo er den Boden erreichen wird, sich beträchtlich verrücken.

3) Bei einem sich gleichförmig bewegenden Dampfschiffe würden die verschiedenen Pressungen, welche einerseits auf den Kiel, andererseits auf die Radschaufeln geübt werden, sich aufheben wenn sie durch parallele Verschiebung nach einem Puncte verlegt wären.

4) Ein Mensch, welcher sich auf einer horizontalen Ebene in Ruhe befindet, übt auf diese einen vertikalen Druck gleich seinem Gewichte; denn die Rückwirkung der Ebene und dieses Gewicht würden sich aufheben wenn sie in den Schwerpunct verlegt wären. Führt dieser Mensch einen Sprung aus, oder erhebt er sich von einem Sitze, so erhält sein Druck auf die Ebene eine vorübergehende Vergrößerung, so lange nämlich als der Schwerpunct mit beschleunigter Bewegung aufwärts steigt. Das Gegentheil findet statt wenn der Mensch, nachdem er zuerst aufrecht stand, sich niedersetzt oder legt. Fängt der anfangs ruhig stehende Mensch zu gehen an, so ist die Translations-Resultante für die gegen den Boden geübten Pressungen schief rückwärts gerichtet, so lange seine Bewegung sich beschleunigt; die Resultante erhält

---

Um einer ungenauen Auffassung dieser Worte vorzubeugen, fügen wir zwei Bemerkungen bei. 1) Was den verticalen Druck betrifft, den wir auf den Boden ausüben, selbst wenn wir in einer nicht verticalen Richtung auf irgend einen Körper wirken, so ist derselbe veränderlich so lange wir in Bewegung sind; bezeichnen wir ihn durch P, so ist der mittlere Druck, $\frac{1}{t}\int Pdt$, zwischen zwei Augenblicken genommen in denen unser Schwerpunct einerlei verticale Geschwindigkeit hat, eine constante Größe. 2) Ueben wir einen horizontalen Druck auf einen Körper aus, so muß ein gleicher Gegendruck von uns auf den Boden oder auf einen andern Körper geübt werden, wenn unser Schwerpunct in Ruhe bleiben soll.

dagegen eine schiefe Richtung nach vorn, wenn der Mensch in seinem Gange zögert, stille hält oder rückwärts tritt.

5) Ein auf der einen Schale einer Wage im Gleichgewicht stehendes Gefäß enthalte eine Flüssigkeit, in welcher ein dichterer Körper mittels eines am Deckel des Gefässes befestigten Fadens aufgehangen ist. Reißt der Faden plötzlich ab, so sinkt der Körper mit beschleunigter Bewegung, und zu gleicher Zeit steigt die Schale mit dem Gefäß. Wenn in Folge des Widerstands der Flüssigkeit der eingetauchte Körper zuletzt mit gleichförmiger Bewegung sänke, so würde von da an der Druck des Gefässes auf die Schale der nämliche sein wie wenn der Körper in Ruhe bliebe. In dem Augenblicke, wo der Körper am Boden des Gefässes ankommt und stillsteht oder zurückprallt, erhält der Druck auf die Schale einen Zuwachs.

§ 4. Allgemeiner Lehrsatz von der lebendigen Potenz eines Systems materieller Puncte.

287. Wir nehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen der Nr. 282 wieder auf, und wenden für jede der Massen m′, m″ den Lehrsatz der Nr. 216 an. Man hat

für m′: $\frac{1}{2} m' v'^2 - \frac{1}{2} m' v_0'^2 = \mathfrak{T}F' + \mathfrak{T}f_{,,}'$;

für m″: $\frac{1}{2} m'' v''^2 - \frac{1}{2} m'' v_0''^2 = \mathfrak{T}F'' + \mathfrak{T}f_{,}''$.

Bezeichnet man die Gesammtarbeit der äußern Kräfte durch $\Sigma\mathfrak{T}F$, und die der beiden Wechselwirkungen (welche, da sie immer einander gleich und entgegengesetzt sind, die Anwendung des Lehrsatzes in Nr. 114 gestatten) durch $\int fdl$, so gibt die Addition der obigen Gleichungen:

$$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F + \int fdl;$$

d. h. der algebraische Zuwachs der lebendigen Potenz des Systems ist gleich der Arbeit der äußern Kräfte, vermehrt um die Arbeit der innern wechselseitigen Kräfte.

288. Anmerkungen. Die Arbeit der wechselseitigen Wirkungen ist positiv in zwei Fällen; nämlich 1) wenn diese Kräfte abstoßend auftreten und die Puncte sich wirklich von einander entfernen; 2) wenn diese Kräfte anziehende sind und die Puncte einander näher kommen. In den beiden andern Fällen ist sie negativ.

Ist die rechte Seite der vorstehenden Gleichung negativ, d. h. übertrifft

die Widerstandsarbeit die Bewegungsarbeit (75), so bleibt die Gleichung deßungeachtet bestehen. In diesem Falle ist der Endwerth $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ der lebendigen Potenz kleiner als ihr anfänglicher Werth $\Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$.

289. Der Satz der Nr. 287 läßt sich leicht auf ein System beliebig vieler materieller Puncte ausdehnen.

Bei vier Puncten z. B., deren Massen m', m'', m''', m^{IV} sind, hat man vier Gleichungen wie die folgende anzusetzen:

$$\frac{1}{2} m'v'^2 - \frac{1}{2} m'v_0'^2 = \mathfrak{T}F' + \mathfrak{T}f'_{,,} + \mathfrak{T}f'_{,,,} + \mathfrak{T}f'_{IV};$$

Durch Addition derselben erhält man links den Zuwachs der gesammten lebendigen Potenz, $\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$; rechts geben die ersten Glieder die Arbeits-Summe der äußern Kräfte, welche durch $\Sigma\mathfrak{T}F$ zu bezeichnen ist; endlich ziehen sich die zwölf Arbeiten der wechselseitigen Wirkungen in sechs Paare zusammen,

$$\mathfrak{T}f'_{,,} + \mathfrak{T}f''_{,}, \qquad \mathfrak{T}f'_{,,,} + \mathfrak{T}f'''_{,}, \qquad \ldots .$$

deren jedes sich (114) auf ein Glied von der Form $\int fdl$ reducirt; und wenn man die Summe dieser Glieder durch $\Sigma \int fdl$ bezeichnet, hat man zuletzt die Gleichung

$$\Sigma \frac{1}{2} mv^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F + \Sigma \int fdl, \qquad [88]$$

welche zugleich auch für jede beliebige Anzahl der im System enthaltenen materiellen Puncte gilt. Ist n diese Anzahl, so hat man links unter jedem Summenzeichen n Summanden, wenn nicht etwa einzelne Puncte in Ruhe sind; — die Arbeits-Summe der äußern Kräfte, $\Sigma\mathfrak{T}F$, hat ebenfalls n Summanden, falls nicht gewisse Puncte des Systems in Ruhe oder blos den wechselseitigen Wirkungen unterworfen sind, was aber nur dann stattfinden könnte wenn man von der Schwere absieht, deren Einwirkung alle Theile der Körper durchdringt; — der Ausdruck für die Arbeit der wechselseitigen Wirkungen, $\Sigma \int fdl$, enthält $\frac{n(n-1)}{2}$ Summanden, wenn jeder Punct auf alle andern einwirkt; üben aber gewisse Puncte keinerlei Wirkung auf gewisse andere, so ist für jedes solche Paar gegenseitig unthätiger Puncte der Werth von f, und mithin auch die Arbeit $\int fdl$, null.

290. Hier ist die wichtige Bemerkung zu machen, daß in den gewöhnlichen Fällen, welche die Natur darbietet, die Intensitäten der oben durch f

dargestellten wechselseitigen Kräfte nicht von der absoluten Bewegung des Systems abhängen, sondern nur von den relativen Bewegungen seiner verschiedenen Elemente unter sich; das Nämliche gilt also auch von den Integralen $\int fdl$. Die in der vorigen Nummer erhaltene Gleichung [88] läßt sich daher in folgenden Worten aussprechen.

Lehrsatz. Der Zuwachs der lebendigen Potenz irgend eines Systems, zwischen zwei beliebigen Lagen, ist gleich der Arbeit der äußern Kräfte zwischen diesen beiden Lagen, vermehrt um die Arbeit der Wechselwirkungen, wobei diese letztere Arbeit blos von der Natur des Systems und von der relativen Bewegung seiner Theile abhängt.

Dieß ist der allgemeine Lehrsatz von der lebendigen Potenz eines materiellen Systems, oder der **allgemeine Lehrsatz vom Arbeits-Effect;** einer der fruchtbarsten Sätze der rationellen Mechanik.

291. Der einfachste Fall für die Anwendung des eben erwähnten Lehrsatzes ist der, wo das in Betracht gezogene System als vollkommen starr angenommen wird, was, wie wir zu Ende der Nr. 278 gesehen haben, bei festen Körpern zulässig ist welche durch Kräfte von mäßiger Intensität angegriffen werden. Unter dieser Annahme ist die Gesammtarbeit $\Sigma\int fdl$ der wechselseitigen Wirkungen null, weil die Factoren dl sämmtlich null sind. Man hat daher die Gleichung

$$\Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 - \Sigma \tfrac{1}{2} mv_0^2 = \Sigma\mathfrak{T}F, \qquad [89]$$

in welcher $\Sigma \frac{1}{2} mv^2$ und $\Sigma \frac{1}{2} mv_0^2$ die Summen der lebendigen Potenzen zu Ende und zu Anfang für alle Puncte des Systems sind, und $\Sigma\mathfrak{T}F$ die algebraische Summe der Arbeiten sämmtlicher äußern Kräfte während des ganzen betrachteten Zeitraums.

292. Einen andern Fall, für welchen die Gleichung [89] noch Geltung hat, erhält man durch die Annahme, das System bestehe aus Körperchen welche ohne Reibung über einander weggleiten, und welche ihre wechselseitigen Einwirkungen ganz aufgeben sobald sie außer Berührung kommen, so daß also bei ihren Bewegungen aus den Wechselwirkungen blos solche Arbeiten entspringen die sich unter einander aufheben. Die Erfahrung lehrt, daß Flüssigkeiten, welche keine zu plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen erfahren, nahezu in diesem Falle sind.

293. Wenn bei der Bewegung eines Systems (starr oder nicht), für welches die Voraussetzung $\Sigma \int fdl = 0$ gilt, die Summe der lebendigen Potenzen in zwei verschiedenen Augenblicken dieselbe ist, — z. B. wenn die sämmtlichen Geschwindigkeiten nach erfolgter Aenderung wieder ihre früheren Werthe annehmen, — so ist die algebraische Arbeits-Summe der äußern Kräfte null; die Widerstandsarbeit ist gleich der Bewegungsarbeit.

(Beispiele: Ein mittels eines Pedals in Umschwung gebrachtes Rad; eine Dampfmaschine von einfacher oder doppelter Wirkung.)

294. Wenn von einem gewissen Augenblick an alle positive oder bewegende Arbeit aufhört, und die während einer gewissen Zeit ausgeübte negative oder widerstehende Arbeit den absoluten Werth $\mathfrak{T}_r$ hat, so daß $\Sigma \mathfrak{T} F = - \mathfrak{T}_r$ ist; wenn ferner diese widerstehende Arbeit, welche ohne Aufhören die Summe der lebendigen Potenz vermindert, so beträchtlich wird, daß sie alle Geschwindigkeiten des Systems vernichtet: so hat man $\Sigma \frac{1}{2} mv^2 = 0$, und die Gleichung der Nr. 291 reducirt sich auf $\Sigma \frac{1}{2} mv_0{}^2 = \mathfrak{T}_r$; d. h. die Widerstandsarbeit, welche von dem System übernommen werden konnte seit dem Augenblicke wo die verschiedenen, das System bildenden Massen $m', m'', \ldots$ mit den Geschwindigkeiten $v_0', v_0'', \ldots$ begabt waren, ist der durch die Abkürzung $\Sigma \frac{1}{2} mv_0{}^2$ dargestellten Summe $\frac{1}{2} m' v_0'^2 + \frac{1}{2} m'' v_0''^2 + \ldots$ numerisch gleich. Nun kann, nach dem Princip der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, das betrachtete materielle System die Einwirkung äußerer widerstehender Kräfte F nicht hinnehmen ohne dafür auf diejenigen Körper, aus deren Gegenwart jene Kräfte entspringen, gleiche und entgegengesetzte Kräfte auszuüben; und wenn man annimmt, daß diese Körper das hier besprochene starre System berühren und mit ihm bei unveränderter Entfernung in Berührung verbleiben, so wird (117) die Widerstandsarbeit $\mathfrak{T}_r$ der Bewegungsarbeit numerisch gleich sein, welche die äußern Körper in der nämlichen Zeit von dem Systeme in Empfang genommen haben. Aus diesem Gesichtspuncte erscheint die Größe $\Sigma \frac{1}{2} mv_0{}^2$ — die Hälfte derjenigen welche gewöhnlich die Summe der lebendigen Kräfte (170) des Systems genannt wird — für jenen Augenblick, in welchem die Geschwindigkeiten v_0 bestehen, als der numerische Ausdruck dessen was man die Arbeitsfähigkeit (capacité de travail) des Systems nennen kann, insoweit nämlich das System diese Befähigung blos vermöge der Geschwindigkeiten seiner Massenbestandtheile besitzt, unabhängig von der Arbeit welche durch die wechselseitigen Wirkungen seiner kleinsten Theilchen bei einer Formveränderung des Systems entwickelt oder absorbirt werden könnte. Und dieß ists, was uns der kurze Ausdruck lebendige Potenz oder lebendiges Vermögen andeuten soll.

Das Hauptwort ist im Sinne von Arbeitsfähigkeit genommen; das Beiwort entspricht der Vorstellung von der Belebung einer Masse durch eine Geschwindigkeit.

§. 5. Von der relativen Bewegung beliebiger Körper gegen ein starres geometrisches System, welches selbst in Bewegung ist.

295. Wird die Bewegung eines beliebigen Systems materieller Puncte in Beziehung auf ein unveränderliches aber bewegliches Axensystem betrachtet, so folgt aus der im 3ten Kap. des 2ten Abschnitts (Nr. 255 u. f.) auseinandergesetzten Theorie, daß man die relative Bewegung jedes Puncts wie eine absolute Bewegung behandeln kann, wenn man die relative Geschwindigkeit, welche der Punct in einem gewissen Augenblicke hat, als Anfangsgeschwindigkeit nimmt, und den wirklich vorhandenen Kräften, denen der Punct von jenem Augenblicke an ausgesetzt ist, noch eine eingebildete Kraft zulegt.

Handelt es sich von einem System dessen Elemente auf einander einwirken, so zerfallen (276) die in Wahrheit vorhandenen Kräfte in äußere Kräfte und in innere wechselseitige Kräfte; die Intensität und die Arbeit der letztern hängt blos ab von den Abständen zwischen den materiellen Puncten des Systems (290); um daher auf dieses System — in seiner relativen Bewegung gegen bewegliche Axen — die in den vorhergegangenen Paragraphen enthaltenen allgemeinen Wahrheiten anwenden zu können, hat man für jeden Punct zu den wirklichen äußeren Kräften noch die dem Puncte zugehörige eingebildete Kraft hinzuzufügen, die wechselseitigen Kräfte aber so zu betrachten als ob die relative Bewegung eine absolute wäre.

296. Bei translatorischer Bewegung der Vergleichungsaxen muß an jedem Puncte des Systems, außer der ihm entsprechenden wirklichen Kraft, die blos gedachte Kraft $-F_e$ angebracht werden, welche in jedem Augenblicke der Transportkraft gleich und entgegengesetzt ist (259). Es sei in dem zur Betrachtung gewählten Augenblick v_e die gemeinschaftliche Geschwindigkeit aller Puncte der Axen, $\frac{dv_e}{dt}$ die Beschleunigung, ϱ der Krümmungshalbmesser der von den Puncten beschriebenen congruenten Curven. Für den Punct von der Masse m ist die Kraft $-F_e$ die Resultante zweier Kräfte; nämlich 1) einer Tangentialkraft $-m\frac{dv_e}{dt}$, dem Sinne nach entgegengesetzt der Beschleunigung $\frac{dv_e}{dt}$, und 2) einer Centrifugalkraft $\frac{mv_e^2}{\varrho}$. Ist die Trans-

lationsbewegung der Axen geradlinig, so ist diese zweite Kraft null; der Halbmesser ϱ ist unendlich groß.

Beispiel. — Wenn ein Schiff (oder ein Reisewagen) eine fast gleichförmige, wenn auch noch so rasche Bewegung hat, so gehen die Bewegungen der Reisenden und der von ihnen mitgeführten Gegenstände in Beziehung auf das Fahrzeug eben so vor sich wie wenn dieses in Ruhe wäre. Nimmt durch eine Kraft, welche nicht auf die transportirten Körper wirkt, das Fahrzeug eine schnellere Bewegung an, deren Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ sei, so scheinen alle diese Körper in entgegengesetztem Sinne von einer Kraft $m\frac{dv}{dt}$ ergriffen. Das Gegentheil tritt ein, wenn der Lauf des Fahrzeugs nachläßt; die transportirten Körper scheinen vorwärts gestoßen zu werden, jeder durch eine Kraft $m\frac{dv}{dt}$ proportional seiner Masse und der negativen Beschleunigung des Fahrzeugs.

297. Dreht sich das System der Vergleichungsaxen gleichförmig um eine unbewegliche Gerade, so ist die hinzugedachte Kraft, welche man für jeden Punct neben den wirklichen Kräften einführen muß, die Resultante zweier in Nr. 265 berechneten Kräfte, nämlich der Centrifugalkraft $F' = m\omega^2 r$, und der zur relativen Geschwindigkeit senkrechten Kraft $F'' = 2m\omega U$.

Will man aber nur den allgemeinen Lehrsatz vom Effect der Arbeit anwenden, so verschwindet die Kraft F'', weil ihre Arbeit null ist (270).

Beim Studium der Hydraulik läßt sich aus dieser Bemerkung mehrfach Nutzen ziehen.

§. 6. Grundbegriffe vom Stoße der Körper.

1) Allgemeine Erklärungen. — Geschwindigkeit des Schwerpuncts.

298. Die festen Körper, so wie die Natur sie uns darbietet, besitzen weder die Stetigkeit der Raumerfüllung noch die Unveränderlichkeit der Gestalt, welche die Geometrie an den von ihr betrachteten Körpern voraussetzt. Ein fester Körper besteht in Wirklichkeit aus getrennten materiellen Elementen, welche unter sich durch wechselseitige Kräfte verbunden sind; und indem diese Kräfte bei sehr schwachen Aenderungen in den Abständen der Elemente ihre Intensitäten beträchtlich ändern, widersetzen sie sich bis zu gewissen Grenzen dem Zerreißen des Systems, ja sie gestatten oft nur unmerkliche

Gestaltsänderungen, wenn äußere Kräfte sich bestreben, den Theilen des Körpers verschiedene Bewegungen zu ertheilen. (Vgl. 278.)

299. Wir denken uns zwei feste Körper, welche unabhängig von einander sich bewegen, vermöge erlangter Geschwindigkeiten und unter der Einwirkung äußerer Kräfte, wie die Schwere, der Druck von Flüssigkeiten, die Anstrengung eines belebten Motors ꝛc. Solange diese Körper einander nicht sehr nahe rücken, wird ihre gegenseitige Anziehung oder Abstoßung äußerst schwach sein und vernachläßigt werden können. Hiebei kann es geschehen, daß, zufolge der jedem Körper zugehörigen Bewegungsursachen, ein materieller Punct auf dem einen und ein materieller Punct auf dem andern Körper gleichzeitig durch einen und denselben geometrischen Punct des Raumes gehen sollten, mit Geschwindigkeiten welche entweder nach Intensität oder nach Richtung oder auch nach beiden zumal verschieden sind. Dieß ist aber unmöglich. Man sagt gewöhnlich, die Undurchdringlichkeit der Körper stehe entgegen, und deshalb müßten die Geschwindigkeiten der beiden betrachteten Puncte plötzlich abgeändert werden, sobald Berührung eintritt. Eine vollständigere Einsicht in diesen Vorgang erhält man aber, wenn man sich vorstellt, daß an den fraglichen Puncten, wenn sie einander sehr nahe gekommen sind, sich eine wechselseitige Wirkung entwickelt, welche in Folge fortgesetzter Annäherung zuletzt immer abstoßend wird und eine der Undurchdringlichkeit entsprechende Intensität annimmt.

Die eben besprochene Erscheinung heißt der Stoß oder das Zusammentreffen der beiden festen Körper.

300. Anmerkung. Die Vorstellung von Kräften, welche beim Stoße der Körper auftreten, ist uns sehr geläufig; wir haben sie durch die jeden Augenblick wiederkehrende Erfahrung erworben, indem jene Kräfte den Pressungen ähnlich sind welche aus unserer Berührung mit den uns umgebenden Körpern erwachsen. Dagegen bedurfte es scharfer Beobachtungen und eines hochbegabten Geistes, um das Princip der gegenseitigen Anziehung der Körper in seiner Allgemeinheit nachzuweisen; und nachdem schon die allgemeine Gravitation als unbestreitbare Thatsache feststand, erhob sich noch unter den Gelehrten die Frage, wie diese Kraft erzeugt und mitgetheilt werden könne. Die Einen behaupteten, das eigentliche Wesen der Anziehung sei uns gänzlich unbekannt; Andere, die nur an solche Kräfte glauben wollten welche die Körper bei wirklicher Berührung unter sich äußern, leiteten die Anziehung aus dem Drucke des Aethers ab, eines feinen Stoffes welcher allen Raum erfülle. Die Erörterungen über diese verschiedenen Ansichten haben zu keinem practischen Resultate geführt. Für uns sind Anziehung und Abstoßung des wägbaren Stoffes Kräfte, welche beide auf Abstand wirksam sind; denn wenn wir sagen, zwei Körper liegen

aneinander an, so verstehen wir darunter keine geometrische Berührung welche jede weitere Annäherung unmöglich macht; sondern wir wollen damit blos aussprechen, die Körper seien einander so nahe, daß ihre wechselseitige Abstoßung merkbar werden und die Bewegung des Körpers abändern kann.

Was nun die letzte Ursache betrifft aus welcher diese Kräfte zur Thätigkeit kommen, so ist dieselbe für die Abstoßung eben so wenig bekannt wie für die Anziehung. Dieß hat übrigens keinen Einfluß auf das Studium der Mechanik und auf ihre Anwendungen. Von Wichtigkeit ist nur die Kenntniß der Gesetze, denen diese Kräfte unterworfen sind; und schon das erste dieser Gesetze, nämlich die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung, gestattet nützliche Folgerungen, namentlich auch bei den Fragen über den Stoß der Körper.

301. Die Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung hat auf den allgemeinen Lehrsatz von der Bewegung des Schwerpuncts geführt (283). Es folgt aus diesem Satze, daß während des Stoßes, oder überhaupt während der gegenseitigen Einwirkung zweier Körper, die Bewegung des Schwerpuncts für das System dieser Körper blos von den äußern Kräften abhängt welche das System angreifen. Sind z. B. diese Kräfte null, d. h. nimmt man die Körper als frei im Raume an, und vernachläßigt — wenigstens für die sehr kurze Dauer des Stoßes — den Effect der Schwere, so wird während dieses Zeitraums der Schwerpunct des Systems sich geradlinig und gleichförmig bewegen.

302. Es seien M, M' die Massen zweier getrennter Körper; v, v' die Geschwindigkeiten ihrer Schwerpuncte unmittelbar vor dem Stoße; u die Geschwindigkeit für den Schwerpunct des Systems beider Körper.

Werden die Geschwindigkeiten auf drei rechtwinkelige Axen projicirt, so hat man nach dem Lehrsatze der Nr. 102 die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(M + M')\,u_x &= Mv_x + M'v'_x\\(M + M')\,u_y &= Mv_y + M'v'_y\\(M + M')\,u_z &= Mv_z + M'v'_z\end{aligned}\right\}\qquad[90]$$

Hieraus findet man u_x, u_y, u_z, und dann auch die Geschwindigkeit u sammt ihren Winkeln mit den Axen.

Die äußern Kräfte an dem System beider Körper sind als null vorausgesetzt. Daher wird, nach dem Lehrsatze in Nr. 283, die Geschwindigkeit u constant bleiben, während die Schwerpuncte der einzelnen Körper, statt die Geschwindigkeiten v und v' beizubehalten, Geschwindigkeitsänderungen erfahren welche von den wechselseitigen Einwirkungen während des Stoßes abhängen.

303. Bekanntlich heißt Mv die Bewegungs-Größe der Masse M. Man kann dieselbe ohne Anstand durch eine gerade Linie vorstellen, welche

dieselbe Richtung hat wie die Geschwindigkeit v. Dann bedeutet Mv_x oder $Mv . \cos(v, x)$ die Projection jener (zur Darstellung von Mv genommenen) Geraden auf die Axe der x. Ebenso ist das Product $(M + M') u_x$ die Projection derjenigen Geraden, welche die Bewegungsgröße für die im Schwerpunct des Systems concentrirt gedachte Gesammtmasse $M + M'$ vorstellt.

Nach dieser Uebereinkunft drücken nun die obigen drei Gleichungen aus, daß, wenn man durch einen Punct des Raumes zwei Gerade gelegt denkt, welche die Größen Mv, M'v' nach Intensität und Richtung darstellen, die Diagonale des über diesen beiden Geraden construirten Parallelogramms in derselben Weise die Größe $(M + M') u$ vorstellt, welche vom Anfang bis zum Ende des Stoßes constant ist.

Man sieht ferner leicht (Nr. 94, 2), daß der Schwerpunct des Systems $M + M'$ sich in einer Ebene bewegt, welche den beiden Geschwindigkeiten v, v' parallel ist mit denen die Schwerpuncte der einzelnen Massen M, M' sich vor dem Stoße bewegen. Dieß ergibt sich ebenfalls aus den Gleichungen [90] der Nr. 302; würde man nämlich die Axe der z senkrecht zu den beiden Geschwindigkeiten v, v' nehmen, so hätte man $v_z = 0$, $v'_z = 0$, also $u_z = 0$.

304. Es kann geschehen daß die beiden Körper nach dem Stoße beisammen bleiben; man sagt dann von der wechselseitigen Einwirkung beider Körper, sie sei eine unelastische, und dieser Fall ist der gewöhnlichste für die Anwendung der vorstehenden Formeln und der entsprechenden geometrischen Construction. Aber auch dann, wenn die Körper nach dem Stoße auseinander gehen, passen noch dieselben Gleichungen und die nämliche Construction auf die gleichförmige Bewegung des System-Schwerpuncts, d. i. des Punctes, der in jedem Augenblicke die Gerade zwischen den besondern Schwerpuncten beider Körper im umgekehrten Verhältniß der Massen M, M' theilt. Nur bleibt in diesem zweiten Falle die Bewegung, welche jeder Körper für sich eingeht und deren Bestimmung zuweilen von Belang ist, unbekannt, solange man nicht die Gesetze der während des Stoßes ausgeübten wechselseitigen Wirkungen kennt.

2) Gerader Stoß zweier Körper.

305. Die vorstehenden allgemeinen Bemerkungen sollen nun auf den einfachsten Fall Anwendung finden; auf den Fall nämlich, wo die Schwerpuncte der beiden Körper sich vor dem Stoße auf einer und derselben geraden Linie bewegen. Der gemeinsame Schwerpunct beider Körper bleibt dann auf dieser Linie, und behält auf ihr seine Bewegung unverändert bei, ungeachtet des Stoßes. Sind beide Körper symmetrisch in Beziehung auf die Axe welche ihre

Schwerpuncte enthält, und hat jeder blos eine Translationsbewegung, so ist v die Geschwindigkeit für sämmtliche Puncte des ersten Körpers vor dem Stoße, und v′ die für sämmtliche Puncte des zweiten. Sobald der Stoß — d. h. die gegenseitige Einwirkung der beiden mit verschiedenen Geschwindigkeiten begabten Körper — beginnt, wird der Körper M von Kräften angegriffen welche von dem Körper M′ stammen, und deren Resultante F (wegen der Symmetrie) längs der durch die zwei Schwerpuncte gehenden Geraden gerichtet ist; umgekehrt empfängt der Körper M′ vom Körper M Kräfte, deren Resultante F′ der vorigen Resultante gleich und entgegengesetzt ist. Hieraus entspringen die Formänderungen und die Vibrationen, welche nothwendig jeder der Körper erfährt, je nach seiner Natur und nach der Vertheilung seiner Materie. Wenn die Differenz der Geschwindigkeiten v, v′, welche die relative Geschwindigkeit bildet, nicht zu groß ist, und die beiden Körper einen gewissen Grad von Festigkeit haben, kann man annehmen, daß die Formänderung während des Stoßes sich nur auf eine geringe Entfernung vom Berührungspuncte erstreckt, und daß die Vibrationen sehr klein sind; woraus folgt, daß die Bewegung jedes Körpers fast eine translatorische bleibt. Unter dieser Voraussetzung sei V die Geschwindigkeit, welche der Schwerpunct des Körpers von der Masse M in einem beliebigen Augenblicke hat und welche nahezu auch allen Puncten dieses Körpers im nämlichen Augenblicke zukommt; V′ die analoge Geschwindigkeit des Körpers von der Masse M′ für denselben Augenblick. Da man angenommen hat, es könne während der Dauer des Stoßes der Antrieb der äußern Kräfte vernachläßigt werden, so hat man, nach dem Lehrsatze der Nr. 282:

$$MV + M'V' = Mv + M'v'.$$

Es wird immer ein Augenblick kommen, wo die beiden Schwerpuncte einerlei Geschwindigkeit u annehmen, welche durch die Gleichung

$$(M + M')\, u = Mv + M'v' \qquad [91]$$

gegeben ist; und bei der Voraussetzung sehr kleiner Vibrationen werden alle Theile beider Körper beinahe ebendiese Geschwindigkeit u haben. Gibt man dieß zu, und ist die gegenseitige Einwirkung der Körper keine elastische, so wird deren Intensität null von dem Augenblicke an, wo die gemeinschaftliche Geschwindigkeit u erreicht ist; der Stoß hat dann sein Ende gefunden, und die beiden vereinten Körper behalten die Geschwindigkeit u, so lange dieselbe nicht durch äußere Kräfte abgeändert wird.

306. Die letzte Gleichung paßt auf alle besondern Fälle. Die zwei Körper können sich nämlich in einerlei Sinn bewegen (wobei die Geschwindigkeiten das nämliche Zeichen haben), — oder einander entgegenlaufen (dann

haben die Geschwindigkeiten v, v' verschiedene Zeichen, und der Sinn der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit u wird durch sein Zeichen angegeben, welches übereinstimmt mit dem Zeichen der größern von beiden Bewegungs-Quantitäten); — oder es kann auch eine der Massen vor dem Stoße in Ruhe sein (in welchem Falle man die entsprechende Geschwindigkeit = 0 zu setzen hat); — oder endlich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit u kann null werden (und dieß findet statt wenn die Bewegungsgrößen Mv, M'v' gleich und von entgegengesetzten Zeichen sind).

3) Von der Dauer des geraden Stoßes und von der Intensität der Kräfte während der Berührung.

307. Die Dauer des Stoßes zwischen zwei Körpern wird von ihrer relativen Geschwindigkeit und ihrer Härte abhängen. Um diese Dauer durch Rechnung bestimmen zu können, müßte das Gesetz bekannt sein nach welchem die während der Berührung wirksamen gleichen Kräfte F und F' sich ändern (305). Eine Annäherung an die wahre Dauer erhält man, wenn man die Kräfte F, F' constant annimmt. Es sei x der Weg, den der Schwerpunct des Körpers M vom Beginn des Stoßes an bis zu dem Augenblicke beschreibt, wo die Schwerpuncte beider Körper die vorausgesetzte gemeinschaftliche Geschwindigkeit u haben; x' sei die analoge Größe für den zweiten Körper; t der Zeitraum zwischen den beiden bezeichneten Augenblicken. In Anbetracht daß (283) jeder Schwerpunct sich so bewegt, wie wenn in ihm die Masse des Körpers concentrirt wäre und er von der constanten Kraft F oder F' angegriffen würde welche der andere Körper ausübt, hat man (153)

$$x = vt - \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2, \qquad x' = v't + \frac{1}{2}\frac{F}{M'}t^2. \qquad [92]$$

In diesen beiden Gleichungen sind sowohl x, x' als v, v' algebraische Größen, d. h sie sind positiv oder negativ, je nach ihrem Sinne auf der geraden Verbindungslinie der Schwerpuncte. Die Strecke, um welche sich die beiden Schwerpuncte einander genähert haben, ist x — x'; bezeichnet man sie durch δ, so hat man

$$\delta = (v - v')\,t - \tfrac{1}{2}\,Ft^2\frac{M + M'}{MM'}.$$

Durch den nämlichen Lehrsatz (283) erhält man (155) noch zwei andere Gleichungen, welche übrigens blos die Ableitungen aus den Gleichungen [92] sind; nämlich

$$Mu - Mv = - Ft, \qquad M'u - M'v' = Ft.$$

Die Elimination von u gibt

$$Ft(M + M') = MM'(v - v');$$

hiernach wird

$$\delta = (v - v')t - \tfrac{1}{2}(v - v')t,$$

und also

$$t = \frac{2\delta}{v - v'};$$

endlich

$$F = \frac{MM'}{M + M'}\frac{1}{\delta}\frac{(v - v')^2}{2}, \qquad [93]$$

oder, wenn P und P' die Gewichte der mit den Massen M, M' begabten Körper sind:

$$F = \frac{PP'}{P + P'}\cdot\frac{1}{\delta}\frac{(v - v')^2}{2g}.$$

Beispiel. Wir nehmen an: 1) die relative Geschwindigkeit $(v - v')$ beider Körper entspreche der Höhe von 1 Meter (145); 2) eines der Gewichte P, P' sei 1 Kilogr., das andere 9 Kilogr.; 3) die Distanz δ betrage 0,001 Meter.

Hiernach ist zu setzen

$$\frac{(v - v')^2}{2g} = 1, \qquad \text{oder} \qquad v - v' = \sqrt{2g} = 4{,}43;$$

$$P = 1; \quad P' = 9; \quad \delta = 0{,}001.$$

Man findet

$$t = \frac{0{,}002}{4{,}43} = 0'',00045$$

und

$$F = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{0{,}001} = 900^{kg}.$$

Obwohl die vorstehende Theorie, welche die Kraft F als constant voraussetzt, nicht genau ist, zeigt sie doch den Einfluß der Härte (von welcher die Größe δ abhängt) auf die Intensität der wechselseitigen Wirkung und auf die Raschheit des Stoßes.

4) Vom Verlust an lebendiger Potenz beim Stoße zweier nicht elastischer Körper.

308. In der industriellen Mechanik ist es von großem Interesse, die lebendige Potenz zweier Körper unmittelbar vor und nach ihrem Stoße zu vergleichen. Bleiben die Körper, nachdem sie sich wechselseitig comprimirt haben, beisammen, und nimmt man an, sie besäßen zu Ende des Stoßes in allen ihren Elementarbestandtheilen eine gemeinsame Geschwindigkeit (indem man die Vibrationen vernachläßigt welche in beiden Körpern stattfinden können),

so sieht man leicht 1) daß die Summe ihrer lebendigen Potenz eine Verminderung erfährt; denn während der Compression, welche beide Körper bis zu dem Augenblicke erlitten haben wo ihre Geschwindigkeiten gleich geworden sind, erfolgte die Annäherung zwischen den der Berührungsstelle benachbarten Massentheilchen trotz der Abstoßung, welche eben durch diese Annäherung hervorgerufen worden ist; und hieraus entspringt eine negative Arbeit. 2) Gleichfalls ohne Rechnung sieht man, daß die von den Molecularkräften herrührende Arbeit — und mithin die ihr numerisch gleiche Aenderung der lebendigen Potenz —, indem sie blos von der relativen Bewegung der zwei Körper abhängt (290), die nämliche bleibt, wenn man vor dem Stoße beiden Körpern in Gedanken eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit zulegt (42), welche sich mit den schon bestehenden Geschwindigkeiten zusammensetzt.

309. Aus der letztern Bemerkung folgt, daß die Berechnung des Verlustes an lebendiger Potenz, den zwei Körper durch den Stoß erleiden, sich immer auf den Fall zurückführen läßt wo einer der Körper vor dem Stoße in Ruhe war. Wir setzen also, bei den Annahmen der Nr. 305, $v' = 0$. Die lebendige Potenz des Systems beider Körper vor dem Stoße ist $\frac{1}{2}Mv^2$. Nimmt man an, daß zu Ende des Stoßes sämmtliche Elemente beider Körper eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit haben, welche mithin die Geschwindigkeit u des Schwerpuncts sein wird, so ist alsdann die lebendige Potenz

$$\tfrac{1}{2}(M + M')\,u^2,$$

oder, wegen $u = \frac{Mv}{M + M'}$ [91]:

$$\frac{1}{2}\frac{M^2v^2}{M + M'}.$$

Folglich beträgt die Differenz oder die Abnahme der lebendigen Potenz

$$\tfrac{1}{2}Mv^2\left(1 - \frac{M}{M + M'}\right),$$

welcher Ausdruck sich reducirt auf

$$\frac{1}{2}\frac{MM'v^2}{M + M'}. \qquad [94]$$

310. Anwendung auf das Einrammen von Pfählen. — Ein Rammklotz von der Masse M und vom Gewichte $P = Mg$ fällt aus der Höhe h auf den Kopf eines Pfahls; seine lebendige Potenz vor dem Stoße ist also $Ph = \frac{1}{2}Mv^2$. Nach einem Stoße von sehr kurzer Dauer wird sowohl der Rammklotz als der Pfahl, dessen Masse $= M'$ und dessen Gewicht $= P'$ sei, eine Geschwindigkeit annehmen welche sehr wenig von der oben berechneten Geschwindigkeit u abweicht, wenn der Widerstand des Bodens gering ist im Vergleich zur Kraft die sich bei der Berührung zwischen Klotz und Pfahl während des Stoßes entwickelt.

Zu Ende des Stoßes ist demnach die lebendige Potenz beider Körper zusammen

$$\frac{1}{2}\frac{M^2v^2}{M+M'} \quad \text{oder} \quad Ph\frac{M}{M+M'} \quad \text{oder} \quad Ph\,.\,\frac{1}{1+\frac{P'}{P}}.$$

Bei diesem Ausdrucke ist von den Vibrationen des Pfahls abgesehen, welche aber auch nichts zur beabsichtigten Einsenkung beitragen. Diese Einsenkung ist nahezu proportional der lebendigen Potenz des Pfahls und des Klotzes, wenn beide auf ihren gemeinsamen Schwerpunct condensirt gedacht werden. Man erhält daher bei dem nämlichen Arbeitsaufwande Ph und dem nämlichen Gewichte P' des Pfahls einen um so größern Effect, je größer P wird (wobei also vorausgesetzt ist daß h in demselben Verhältniß abnimmt). — Die Verminderung der lebendigen Potenz durch den Stoß ist nicht blos deßhalb ein Uebelstand weil dadurch ein Theil vom Nutz-Effect des Rammklotzes verloren geht; sie stellt zugleich eine Arbeit der Molecularkräfte dar, welche die Umgestaltung der vom Stoße betroffenen Stücke begleitet, und diese Formänderung kann bis zur Zerstörung fortschreiten. Diese Größe nimmt ab, wenn — bei unverändertem Werthe des Products Ph — der Bruch $\frac{P}{P'}$ zunimmt. Es ist demnach aus doppeltem Grunde vortheilhaft, Rammklötze von großem Gewichte bei mäßiger Fallhöhe anzuwenden. (Man kann sich überzeugen, daß ein Nagel durch kleine Schläge mit einem hinreichend großen Hammer leichter unverbogen einzutreiben ist als durch weiter ausgeholte Streiche mit einem zu kleinen Hammer).

311. Ist (309) keine der Geschwindigkeiten v, v' null, so kann man, ohne die relative Bewegung der beiden Körper zu ändern, in Gedanken einen derselben als ruhend nehmen, indem man von beiden Geschwindigkeiten einen und denselben Werth v' subtrahirt. Dann hat der Körper von der Masse M nur noch die Geschwindigkeit $v - v'$; der Körper von der Masse M' ist auf den Zustand anfänglicher Ruhe reducirt, und man kommt somit auf den vorherbetrachteten Fall zurück. Der Verlust an lebendiger Potenz — numerisch gleich der negativen Arbeit der Molecularwirkungen während des Stoßes, bis zu dem Augenblicke wo die Geschwindigkeit einen für beide Körper gemeinschaftlichen Werth annimmt — ergibt sich daher, wenn man $v - v'$ für v in dem letzten Ausdruck [94] der Nummer 309 substituirt. Man erhält

$$\frac{1}{2}\frac{MM'(v-v')^2}{M+M'}. \qquad [95]$$

Eine Bestätigung dieses Resultats liefert die Vergleichung der lebendigen Potenz vor dem Stoße, $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}M'v'^2$, mit jener welche im Augenblicke

der größten Compression statt hat, nämlich $\frac{1}{2}(M + M')\,u^2$. Setzt man für u seinen Werth $\frac{Mv + M'v'}{M + M'}$ [91] und führt die Subtraction aus, so findet man $\frac{1}{2}\frac{MM'\,(v - v')^2}{M + M'}$, wie oben.

Man bemerke, daß diese Größe, nach der Formel [93] in Nr. 307, dem Producte $F\delta$ gleich ist, welches in der That die Arbeit der Molecularwirkungen ausdrückt.

312. Die nämliche Betrachtung der relativen Bewegung führt noch auf eine andere Folgerung, wie wir sogleich sehen werden. Bei jedem beliebigen Werthe der Geschwindigkeit u (von welcher vorausgesetzt wurde, daß sie im Augenblicke der größten Compression die gemeinschaftliche sei) kann man für die Geschwindigkeiten v, v′ die Geschwindigkeiten $v - u$, $v' - u$, von denen die eine positiv, die andere negativ sein wird, substituiren, ohne daß dadurch der Verlust an lebendiger Potenz sich ändert, den die zwei Körper seit Anfang des Stoßes erlitten haben. Nun ist bei diesen angenommenen Anfangsgeschwindigkeiten die gemeinsame Geschwindigkeit im Augenblick der größten Compression null, da man für sie $u - u$ erhalten würde; also ist der Verlust an lebendiger Potenz gleich der gesammten lebendigen Potenz vor dem Stoße, nämlich

$$\frac{1}{2}M\,(v - u)^2 + \frac{1}{2}M'\,(u - v')^2, \qquad [96]$$

d. h. *der in Rede stehende Verlust ist gleich der Summe derjenigen lebendigen Potenzen, welche die beiden Körper (beziehungsweise) besitzen würden, wenn jeder derselben mit der von ihm beim Stoße verlorenen oder gewonnenen Geschwindigkeit begabt wäre.*

Dieß ist der **Carnot'sche Lehrsatz**, der gewöhnlich auf algebraischem Wege bewiesen wird, und den man auch noch durch folgende Probe bestätigt finden kann. Substituirt man in [96] für u seinen Werth $\frac{Mv + M'v'}{M + M'}$, so findet man als Resultat den bereits ausgerechneten Verlust [95] als Function von M, M′, v und v′.

313. Man darf nicht vergessen, daß die Formeln der Nummern 309, 311 u. 312 den Verlust an lebendiger Potenz unter der Voraussetzung angeben, beide Körper hätten in allen ihren Puncten die nämliche Geschwindigkeit u nach dem Stoße; was darauf zurückkommt, die ganze Masse des Systems in dessen Schwerpunct verlegt zu denken. Wenn aber nach dem Stoße die Körper sich trennen, oder vibriren, oder überhaupt relative Geschwindigkeiten beibehalten, müßte der nach den erwähnten Formeln berechnete

Verlust um die gesammte lebendige Potenz vermindert werden welche sich ergibt, wenn man blos die relative Bewegung des Systems rücksichtlich beweglicher Axen in Rechnung zieht, welche durch den Schwerpunct gehen und parallel zu drei festen Geraden bleiben (110).

5) Vom Stoße elastischer Körper.

314. Es kommt oft vor, daß zwei Körper nach ihrem geraden Stoße sich trennen, vermöge wechselseitiger Repulsivkräfte, welche an der Berührungsstelle in dem Augenblicke thätig sind wo eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Schwerpuncte eingetreten ist.

In der Theorie vom Stoße der Körper nimmt man an, es gebe eine vollkommene Elasticität, welche darin besteht, daß zwei beliebige Massentheilchen, nachdem sie einander genähert oder von einander entfernt worden sind, ihren ursprünglichen Abstand wieder zu erlangen streben, und daß während der Rückkehr auf diesen ersten Abstand ihre wechselseitige Wirkung wieder die nämlichen Intensitätsgrade (in umgekehrter Folge) durchläuft wie während der Verschiebung. Diese Eigenschaft scheint in der That allen festen Körpern zuzukommen, so lang ihnen eine nur geringe Störung ihres gewöhnlichen Zustandes widerfährt, deren Grenze je nach der Natur des Körpers wechselt. Aber man nimmt außerdem noch an, der Stoß zweier elastischer Körper könne zuweilen in der Art vor sich gehen, daß in dem nämlichen Augenblicke, in welchem die Körper sich trennen, die ursprüngliche Gestalt derselben und die relative Ruhe zwischen ihren Massentheilchen sich wiederherstellt. Unter dieser Voraussetzung, welche stets mehr oder weniger von der Wirklichkeit abweicht, ist die gesammte Molecular-Arbeit vom Beginn bis zum Ende des Stoßes null.

Nimmt man unter ebendieser Voraussetzung die Untersuchung der Nr. 305 über den geraden Stoß wieder auf, und bezeichnet durch V die Geschwindigkeit des Körpers von der Masse M nach der Trennung welche den Stoß beendigt, durch V' die Geschwindigkeit des Körpers von der Masse M' im nämlichen Augenblick, so hat man (290), da die Arbeits-Summen der Molecularkräfte null sind:

$$\tfrac{1}{2}\,MV^2 + \tfrac{1}{2}\,M'V'^2 = \tfrac{1}{2}\,Mv^2 + \tfrac{1}{2}\,M'v'^2. \qquad [97]$$

Diese Gleichung, verbunden mit der aus dem Lehrsatze von der Bewegungsgröße (282) folgenden Gleichung

$$MV + M'V' = Mv + M'v' \qquad [98]$$

läßt V und V' bestimmen.

315. Die obigen Gleichungen geben

$$M' (V'^2 - v'^2) = M (v^2 - V^2),$$

und

$$M' (V' - v') = M (v - V).$$

Durch Division kommt

$$V' + v' = v + V, \quad \text{oder} \quad V' - V = v - v', \qquad [99]$$

d. h. die relative Geschwindigkeit hat blos das Zeichen geändert, so daß also zwei Körper, welche mit der relativen Geschwindigkeit $v - v'$ aneinander gekommen sind, nach dem Stoße mit der relativen Geschwindigkeit $V' - V$ auseinander weichen.

316. Nach dieser Zwischenbemerkung lassen sich nun die Geschwindigkeiten V und V' um so leichter finden, nämlich aus den Gleichungen [98] und [99], welche beide vom ersten Grade sind. Wird die zweite mit M multiplicirt und dann zur ersten addirt, so kommt

$$(M + M') V' = 2Mv + M'v' - Mv',$$

woraus sogleich der Werth von V' folgt. Eine ähnliche Formel gibt den Werth von V.

Die vorige Gleichung kann so geschrieben werden:

$$(M + M') V' = 2Mv + 2M'v' - (M + M') v'.$$

Nun ist $Mv + M'v'$ die Bewegungsgröße des Systems, wenn man sich dieses im Schwerpunct condensirt denkt; da aber diese Größe (305) auch durch $(M + M')u$ dargestellt ist, so erhält die Gleichung die sehr einfache Form

$$V' = 2u - v',$$

welche, mit $V' - V = v - v'$ verbunden, $V = 2u - v$ gibt.

Die Geschwindigkeiten V, V' nach dem Stoße übertreffen also die Geschwindigkeit u des Schwerpuncts um den nämlichen Werth um welchen diese Geschwindigkeit u die entsprechenden Geschwindigkeiten v, v' vor dem Stoße übertrifft; oder sie werden von u um ebensoviel überschritten als u von v, v'.

317. In dem besondern Falle, wo die Massen M, M' der beiden elastischen Körper einander gleich sind, hat man

$$2u = v + v', \qquad V = v', \qquad V' = v,$$

d. h. es findet ein Austausch der Geschwindigkeiten statt. Ist einer der Körper vor dem Stoße in Ruhe, so bleibt der andere nach dem Stoße in Ruhe, und der erste nimmt die frühere Geschwindigkeit des zweiten an.

318. An zwei Bällen von Elfenbein oder Kautschuk sind die Voraussetzungen der Nr. 314 beinahe verwirklicht, und die Versuche über ihren gegenseitigen Stoß stimmen mit den aus jenen Voraussetzungen hergeleiteten Formeln ziemlich gut überein. Doch darf nicht unbemerkt bleiben, daß die Gestalt der sich stoßenden Körper von bedeutendem Einflusse auf die Erscheinung ist. Läßt man eine Kugel aus Kautschuk auf eine Marmorplatte fallen, so springt sie bis fast auf $\frac{2}{3}$ ihrer Fallhöhe zurück. Stellt man aber denselben Versuch mit einer Scheibe vom nämlichen Stoffe an, welche man auf die flache Seite fallen läßt, so ist der Rücksprung fast null. Gleichwohl hat der fallende Körper nicht aufgehört, beinahe vollkommen elastisch zu sein. Die Erklärung der Sache ist in den Vibrationen zu suchen, welche im letztern Falle sich gegen das Innere der Scheibe fortpflanzen und nach der Trennung von der Platte fortdauern, während dagegen die Vibrationen nur in der Nähe des Berührungspuncts eine beträchtliche Intensität haben wenn die sich stoßenden Körper Kugeln sind, oder wenn wenigstens der eine von beiden, und zwar der weniger harte, diese Gestalt hat.

319. Maschinentheile, welche sich stoßen, nehmen gewöhnlich nach ihrer Begegnung eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit in einem zur Berührungsstelle normalen Sinne an. Aus dem plötzlichen Wechsel der Geschwindigkeiten erwachsen Verluste an lebendiger Potenz oder negative Arbeitsgrößen, welche man soviel wie möglich vermindern muß und von denen man sich stets Rechenschaft zu geben hat, wie man in der Folge sehen wird.

---

320. Wenn zwei feste Körper über einander weg gleiten oder rollen, so erzeugen ihre wechselseitigen Einwirkungen immer eine negative Arbeit; diese Erscheinung wird im Allgemeinen die Reibung genannt.

Eine andere Ursache von Widerstandsarbeit besteht in dem vorübergehenden Biegen gewisser Körperstücke, welche beim Wiederaufrichten die für ihre Beugung aufgewendete Arbeit nicht zurückerstatten; hieher gehört die Steifheit der Seile.

Den nähern Untersuchungen über die Reibung und die Steifheit der Seile wird ein besonderer Abschnitt dieses Buches gewidmet werden.

§. 7. Allgemeine Begriffe über Maschinen.

321. Eine Maschine ist ein Körper, oder ein Complex von Körpern, der die Bestimmung hat, an einigen seiner Puncte gewisse Kräfte aufzunehmen, und durch andere Puncte des Systems Kräfte auszuüben, welche gewöhnlich von den erstern verschieden sind, sowohl nach Intensität und Richtung als hinsichtlich der Geschwindigkeit ihrer Angriffspuncte.

322. Bei manchen Maschinen ist die Berechnung der Kräfte, welche nöthig sind um den vorliegenden Zweck zu erreichen, von untergeordnetem Belang; dahin gehören die meisten Werkzeugmaschinen und der größte Theil derjenigen Apparate, welche die Geschicklichkeit der menschlichen Hand zu ersetzen haben. Die Hauptsache ist hier die Vollkommenheit der auszuführenden Operation, oder die Regelmäßigkeit der beabsichtigten Bewegung, abgesehen von der Intensität welche etwa der Motor oder seine Arbeit haben muß.

Dagegen ist jene Berechnung von größter Wichtigkeit bei Herstellung solcher Maschinen, durch welche die der Industrie von der Natur zur Verfügung gestellten Kräfte nutzbar gemacht werden sollen, um an gewissen äußern (d. i. nicht zur Maschine selbst gehörigen) Körpern große Arbeitswerthe zu erzeugen.

323. Unter dem dynamischen Effect einer Maschine versteht man die Arbeit der Kräfte, welche sie auf die eben erwähnten äußern Körper ausübt, nachdem man diese ihrer Einwirkung unterworfen hat. Diese Arbeit ist im Allgemeinen positiv, in manchen besondern Fällen aber auch negativ. Letzteres findet z. B. statt bei einem Krahn, dessen man sich bedient um Lasten aus einer gewissen Höhe langsam herabzulassen; oder bei einer Locomotive, wenn man den Dampf zur Verminderung der vom Wagenzug erlangten Geschwindigkeit verwendet. Hier bringt die Hand des Arbeiters an der Kurbel des Krahns, oder der Dampf an den Kolben der Locomotive eine negative oder widerstehende Arbeit hervor.

324. In den gewöhnlichen Fällen, d. h. wenn der dynamische Effect positiv ist, erzeugt die Rückwirkung der äußern Körper, auf welche die Maschine zu wirken bestimmt ist, an dieser hinwieder eine negative oder Widerstandsarbeit (276). Diese Rückwirkung kann man den Hauptwiderstand nennen, zum Unterschiede von andern Kräften, deren negative Arbeit aus wechselseitigen Einwirkungen entspringt welche zwischen der Maschine und ihren Unterlagen oder der sie umgebenden Luft stattfinden, oder auch zwischen den Theilen der Maschine selbst. Diese verschiedenen Kräfte (Reibung, Steifheit der Seile rc.), welche aus der physischen Constitution der Körper hervorgehen, und deren negative Arbeit dem Zwecke der Maschine fremd ist, aber nicht völlig vermieden werden kann, lassen sich passend als secundäre Widerstände oder Nebenwiderstände bezeichnen.

Man findet hin und wieder für den Hauptwiderstand den Namen nützlicher oder activer Widerstand, und für die andern die Benennung passive Widerstände. (Vgl. d. Note zu Nr. 281.)

325. Die Kräfte, durch deren Thätigkeit (321) die Bewegung einer Maschine eingeleitet oder unterhalten wird, während dieselbe zugleich verschiedenen Widerständen ausgesetzt ist, bestehen zuweilen in der Einwirkung der Schwere auf die Maschine selbst; zuweilen in den Molecularwirkungen innerer, sich abspannender Federn; am häufigsten aber werden diese Kräfte von Körpern ausgeübt, welche nicht zur Maschine selbst gehören, sondern einen abgesonderten Motor für sie bilden. Solche Körper verrichten das ihnen obliegende Geschäft auf zweierlei Art; nämlich bald dadurch, daß sie einen Theil ihrer zuvor besessenen Geschwindigkeit verlieren (Beispiele: Windmühlen; gewisse Wasserräder, in denen sich das Wasser fast horizontal bewegt, aber so, daß es mit einer größern Geschwindigkeit ein= als austritt); bald durch gänzliche oder theilweise Uebertragung derjenigen Kräfte, welche sie selbst entweder von der Schwere, oder von der Elasticität gasförmiger Körper, oder von der Muskelthätigkeit lebendiger Wesen rc. empfangen haben. (Beispiele: Wasserräder welche durch das Gewicht des Wassers umgetrieben werden; Maschinen welche durch Dampf, durch äußere Federn, durch Thiere rc. in Bewegung gesetzt sind.)

326. Da eine Maschine als ein System von materiellen Puncten angesehen werden kann, welche äußern Kräften und innern wechselseitigen Kräften unterworfen sind, so sind die allgemeinen Principien der Bewegungen eines solchen Systems auf jede beliebige Maschine anwendbar. — Es sei

$\mathfrak{T}_m$ die Bewegungsarbeit, welche während einer gewissen Zeit entweder aus der Wirkung von Federn sich ergibt, die zur Maschine selbst gehören und sich abspannen; oder aus der Kraftentwickelung äußerer Körper welche den gesonderten Motor ausmachen;

$\mathfrak{T}$ die gesammte Arbeit welche wir vorhin als dynamischen Effect bezeichnet haben, während der nämlichen Zeit; also

— $\mathfrak{T}$ die Arbeit derjenigen Kräfte, welche durch ihre Einwirkung auf die Maschine den Hauptwiderstand in dem betrachteten Zeitraume bilden;

— $\mathfrak{T}_r$ die gesammte Arbeit der Nebenwiderstände während derselben Zeit; eine Arbeit, welche theils aus den Reibungen und Erschütterungen durch die benachbarten Körper, theils aus den Reibungen und Gestaltsänderungen der Maschinentheile selbst entspringt;

P das Gesammtgewicht der Maschine;

H_0 und H die Ordinaten ihres Schwerpuncts für seine Anfangs= und End=Lage unterhalb einer festen, beliebig angenommenen Horizontalebene;

p oder mg das Gewicht eines materiellen Puncts der Maschine;

v_0 und v die Anfangs= und Endgeschwindigkeit dieses Punctes für die betrachtete Zeit.

Der allgemeine Lehrsatz vom Arbeitseffect der Kräfte (289) und der Satz von der Arbeit der Schwere (124) geben die Relation

$$\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2 = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_r + P(H - H_0),$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m + P(H - H_0) - \mathfrak{T}_r - \left(\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2\right), \quad [100]$$

d. h. man erhält den dynamischen Effect einer Maschine für einen bestimmten Zeitraum, wenn man zu der (vom Gewichte der Maschine unabhängigen) Bewegungsarbeit die Arbeit der Schwere (gemessen durch das Product aus dem Gewicht der Maschine und der Höhe um welche ihr Schwerpunct herabgekommen ist) addirt, dann die Arbeit der Nebenwiderstände abzieht, und endlich noch den Zuwachs der lebendigen Potenz der Maschine subtrahirt; wobei immer jene Arbeiten und dieser Zuwachs auf die in Betracht gezogene Zeit zu berechnen sind.

327. Das Glied $\mathfrak{T}_r$ wächst ohne Grenze mit der Zeit während welcher man die Bewegung der Maschine betrachtet; das Nämliche gilt von dem Gliede $\mathfrak{T}$, so lange der Maschine ein Nutzwiderstand dargeboten ist, oder so lange sie nicht leer geht. Das Glied $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ dagegen erreicht bald einen Werth den es in der Folge nicht überschreitet; ja es ändert sich oft nur wenig mehr, von dem Augenblick an wo es diese Grenze zuerst erreicht hat; und wenn mit diesem Augenblicke, oder mit einem spätern, der Zeitraum beginnt auf welchen sich die vorstehende Formel bezieht, so oscillirt (so zu sagen) die Differenz $\frac{1}{2}\Sigma mv^2 - \frac{1}{2}\Sigma mv_0^2$ innerhalb unbeträchtlicher Werthe, welche zuletzt in allen Fällen gegen die Summe der wachsenden Größen $\mathfrak{T}_r$ und $\mathfrak{T}$ vernachläßigt werden können.

Eben so verhält es sich mit dem (auf das Sinken des Maschinen-Schwerpuncts bezüglichen) Producte $P(H - H_0)$, wofern die Maschine nicht eine ortverändernde ist, in welchem Falle der absolute Werth dieses Products zur Bewegungsarbeit $\mathfrak{T}_m$ geschlagen wird wenn der Schwerpunct gesunken ist, andernfalls aber zur schädlichen Widerstandsarbeit.

Berechnet man daher die Glieder der obigen Gleichung zwischen zwei weit genug auseinanderliegenden Augenblicken, so kann man dieselbe näherungsweise auf die sehr einfache Formel

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m - \mathfrak{T}_r$$

reduciren; und diese ist in aller Strenge wahr, wenn man die Maschine während eines Zeitraums in Betracht zieht, für dessen Anfangs- und End-

Augenblick die Geschwindigkeiten ihrer verschiedenen Theile die nämlichen sind und der Schwerpunct in der nämlichen Höhe liegt. Diese Formel ist besonders dadurch merkwürdig, daß in ihr die Kräfte, welche auf die Maschine wirken, nicht an und für sich erscheinen, sondern nur in Verbindung mit den von den Angriffspuncten beschriebenen und auf die Richtungen projicirten Wegen.

Die Eigenschaft, welche in dieser Gleichung ausgesprochen liegt, wurde von Coriolis das Princip der Uebertragung der Arbeit benannt.

328. Man zieht daraus den wichtigen Schluß, daß eine Maschine stets weniger nutzbare Arbeit liefert als der Motor ihr mittheilt.

329. Nimmt man in der ersten Gleichung der Nr. 326 an, die gesammte Bewegungsarbeit $\mathfrak{T}_m + P(H - H_0)$ sei kleiner als die gesammte Widerstandsarbeit $\mathfrak{T} + \mathfrak{T}_r$, welche niemals null ist, selbst nicht wenn die Maschine leer gienge: so schließt man

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\, mv^2 < \tfrac{1}{2}\,\Sigma\, mv_0^{\,2};$$

folglich verzögert die Maschine ihren Gang; und sie wird zuletzt still stehen, wenn die Widerstandsarbeit so lange die Oberhand behält daß sie die anfängliche lebendige Potenz aufzehrt. Hierin liegt der Beweis für die Ungereimtheit des Gedankens, durch gewisse Apparate eine immerwährende Bewegung erhalten zu wollen, ohne daß eine Bewegungsarbeit stets von neuem einschreite — oder für die Unmöglichkeit ein perpetuum mobile herzustellen.

330. Dürfte man annehmen, es gebe eine Maschine ohne alle Reibung, ohne Stoß, ohne jeden Widerstand welcher dem beabsichtigten Effect Eintrag thut, — eine Annahme, welche manchmal, und vielleicht zu häufig, beim theoretischen Studium des Maschinenwesens zugelassen wird, — so würde die Gleichung für die Uebertragung der Arbeit sich verwandeln in

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_m.$$

Auf diese Relation gründet sich der in der Mechanik übliche Satz, daß bei den Maschinen an Kraft verloren gehe was an Geschwindigkeit gewonnen werde. Um genau zu sein, müßte man sagen, man verliert an Kraft mehr als man an Geschwindigkeit gewinnt; dieß ist die Bemerkung der Nr. 328 in andern Worten.

331. Trotz des unvermeidlichen Verlustes von einem Theil der Bewegungsarbeit gewähren die Maschinen die offenbarsten Vortheile. Sie nehmen die von der Natur zur Verfügung dargebotene Arbeit auf, führen

sie weiter, vertheilen oder concentriren dieselbe auf tausend Arten, je nach Bedürfniß, indem sie nach unserm Belieben den einen oder den andern Factor der übergetragenen Arbeit ändern: entweder die Intensität der auf den widerstehenden Körper auszuübenden Kraft, oder den Weg, welchen der Angriffspunct dieser Kraft beschreibt. So kann z. B. ein Arbeiter, wenn er mit einer fortgesetzten mittlern Anstrengung von 8 Kilogr. auf eine Kurbel wirkt und dabei die Handhabe derselben um $0^m,75$ in der Secunde fortbewegt, eine Last von 1000 Kilogr. langsam emporheben, oder eine gewisse Zahl von Spindeln in Umlauf setzen, deren jede nur einen schwachen Widerstand bietet.

332. Um über die im Vorhergehenden entwickelten Begriffe im Klaren zu bleiben, ist durchaus nöthig, daß man mit dem Ausdrucke dynamischer Effect keinen andern Sinn verbinde als den, welchen die Definition der Nr. 323 gibt, und diese Arbeit nicht mit dem Nutzeffect der Maschine verwechsle. Handelt es sich z. B. um eine Ramm-Maschine (den Rammklotz mit inbegriffen), so besteht der Nutzeffect in der Einsenkung der Pfähle, und dieser erfordert nothwendigerweise eine Arbeit gleich derjenigen, welche die Reibung und der Widerstand des Bodens entgegensetzen; der dynamische Effect aber umfaßt überdieß noch die Arbeit, deren nutzloser Verbrauch die Pfahlköpfe umgestaltet und den Boden rings auf eine größere oder geringere Entfernung erschüttert (310). Oder betrachtet man eine Maschine zur Hebung von Wasser mittels einer Pumpe, so besteht der Nutzeffect in der Erhebung einer gewissen Wassermenge auf diejenige Höhe, welche durch den Niveau-Unterschied der beiden Behälter angezeigt ist, und er verlangt eine Arbeit gleich dem Gewichte des Wassers multiplicirt mit dieser Höhe; der dynamische Effect dagegen ist die Arbeit welche der Kolben auf das von ihm berührte Wasser ausübt; er umfaßt außer der vorhin ausgedrückten Arbeit auch jene, welche durch die Widerstände in Anspruch genommen wird die das Wasser in der Röhrenleitung erfährt, — Widerstände welche von der Länge und dem Durchmesser der Leitung und von der Geschwindigkeit des Wassers abhängen.

333. Gewöhnlich besteht eine Maschine aus gesonderten, aber unter sich in Verbindung gesetzten Stücken, deren eines — der Receptor — die Wirkung des Motors aufnimmt; andere Stücke — die Organe zur Transmission der Bewegung — sind als Vermittelungsglieder zwischen den Receptor und diejenigen Körper eingeschaltet, an denen der dynamische Effect der Maschine sich bethätigt.

334. Jedes Stück einer zusammengesetzten Maschine kann selbst als eine Maschine angesehen werden, welche ihren Motor und ihren Hauptwider-

stand hat. Es ist sogar gewöhnlich, daß man die mit dem Receptor begonnene Berechnung einer Maschine bei einem gewissen Stücke abbricht, über welches hinaus der Rest der Maschine nur noch als ein Werkzeug erscheint, dessen Verrichtungen hauptsächlich durch die Erfahrung zu bestimmen sind; desgleichen lehrt die Erfahrung die Geschwindigkeiten kennen, welche gewissen Puncten dieser besondern Maschine zukommen müssen, sowie die Intensitäten der Kräfte welche an ebendiesen Puncten zu wirken haben, damit sie regelmäßig gehe.

Zweites Kapitel.

Allgemeine Statik. — Nothwendige Bedingungen für das Gleichgewicht eines materiellen Systems.

---

§. 1. Vom Gleichgewicht eines materiellen Puncts.

335. Als die Bewegung eines materiellen Puncts unter der Wirkung mehrerer constanter Kräfte abgehandelt wurde, hat sich gezeigt (208), wie sich die absolute Bewegung desselben in jedem Augenblicke zusammensetze 1) aus der gleichförmigen geradlinigen Bewegung welche blos aus der erlangten Geschwindigkeit folgen würde, und 2) aus der gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung, welche der Resultante der Kräfte entspräche, wenn diese auf den beweglichen Punct im betrachteten Augenblick ohne Anfangsgeschwindigkeit wirkten.

Die Resultante der wirkenden Kräfte kann in diesem Augenblicke null sein. Damit dieß stattfinde, ist nothwendig und hinreichend, daß das Polygon der Kräfte (202) sich schließe, d. h. daß eine zusammenhängende Reihenfolge gerader Linien, welche man proportional und (in gleichem Sinne) parallel mit den Kräften zeichnet, ein geschlossenes Polygon gebe; oder — was auf dasselbe hinauskommt — es ist nothwendig und hinreichend, daß die Summen aus den Projectionen der Kräfte auf drei Axen, welche nicht zu einer und derselben Ebene parallel sind, einzeln null sind; denn jede dieser Summen ist die Projection der Resultante auf die betreffende Axe (203). In diesem Falle reducirt sich — eben nach der Definition der Resultante mehrerer Kräfte (200), und vermöge des Trägheitsprincips — die Bewegung auf eine gleichförmige geradlinige, wie sie der erlangten Geschwindigkeit entspricht. Ist letztere ebenfalls null, so besteht Ruhe.

336. Umgekehrt: Bleibt ein materieller Punct in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung, so ist die Resultante der auf ihn einwirkenden

Kräfte nothwendig null; denn hätte diese irgend einen Werth R, so wäre die Beschleunigung der Bewegung, in welcher der mit der Masse m begabte Punct begriffen ist, $\frac{R}{m}$ statt null.

337. Von Kräften, welche so auf einen Punct wirken daß ihre Resultante null ist, sagt man, sie seien im Gleichgewicht. Auch bedient man sich des allgemein angenommenen Ausdrucks: solche Kräfte heben sich auf oder vernichten sich gegenseitig; obgleich sie in Wahrheit nicht aufhören zu wirken. Sind diese Kräfte alle bekannt bis auf eine, so ergibt sich die letztere leicht entweder durch geometrische Construction oder durch Rechnung; denn sie ist gleich und entgegengesetzt der Resultante für die bekannten Kräfte.

338. Lassen sich unter den Kräften, welche einen materiellen Punct angreifen, mehrere einzelne in solcher Art zusammenfassen daß ihre Resultante null ist, so werden die stattfindenden Bewegungsänderungen blos durch die übrigen Kräfte bewirkt; denn die Resultante aller Kräfte reducirt sich dann auf die Resultante der letztern. Dieß ist offenbar in der Zusammensetzung der Kräfte (202) begründet.

Wenn man daher zu den auf einen Punct wirkenden Kräften zwei oder mehr hinzufügt deren Resultante null ist, so ändert dieß nichts in der Bewegung.

339. Umgekehrt: Kann man von den gemeinschaftlich wirkenden Kräften mehrere gleichzeitig weglassen, ohne daß sich dadurch die Bewegung ändert, so sind diese weggelassenen unter sich im Gleichgewicht; denn ihre Resultante, wenn eine solche vorhanden wäre, würde durch Hinzutreten zur Resultante der andern Kräfte die Gesammtresultante abändern.

§. 2. Lehrsatz von der virtuellen Arbeit.

340. Ist ein beliebiges materielles System (mehr oder weniger starr, flüssig oder gasförmig) in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Translationsbewegung, so besteht für jeden seiner Puncte Gleichgewicht zwischen den äußern Kräften F, welche diesen Punct insbesondere angreifen, und den Einwirkungen f welche er von den andern Puncten des Systems empfängt. Man sagt dann, die äußern Kräfte F halten sich das Gleichgewicht durch Vermittelung der physischen Constitution des Systems.

341. Da die Gesetze, denen die innern wechselseitigen Kräfte unterliegen, nicht vollständig bekannt sind, so kann man blos mit Hülfe von Hypothesen, welche durch Versuche annähernd gerechtfertigt werden, und nur

in einfachen Fällen dahin gelangen, alle Bedingungen für das Gleichgewicht eines biegsamen Körpers oder eines flüssigen Systems zu bestimmen. (So liegt z. B. eine gewisse Hypothese zu Grunde, wenn man bei Untersuchung der Widerstandsfähigkeit solcher Materialien, die für Constructionen verwendet werden, die krummlinige Figur sucht welche etwa ein prismatisches Stück Holz oder Eisen, horizontal auf zwei Stützen gelegt, unter der Wirkung verticaler Kräfte annimmt, und die veränderliche Spannung oder Pressung bestimmt welche nach der Längenrichtung an verschiedenen Puncten dieses Stückes stattfinden. Oder berechnet man für einen schweren flüssigen Körper, welcher in einem Gefäße im Gleichgewicht ist, den Druck den er auf einen gegebenen Punct der Gefäßwand übt, so geht man dabei von der Hypothese eines *vollkommenen* Flüssigkeitszustandes aus.) Doch gibt es (wie wir alsbald sehen werden) für alle Fälle, in welchen ein beliebiges materielles System im Gleichgewicht sein kann, gewisse Bedingungen, denen nothwendig die äußern Kräfte Genüge leisten müssen, wie auch immer die innern Kräfte beschaffen sein mögen; und diese Bedingungen sind inbegriffen in einer einzigen Formel von merkwürdiger Einfachheit, auf welche die Betrachtung der Arbeit der Kräfte führt.

342. Ein System materieller Puncte m', m'', m''', ... sei im Gleichgewicht, während dieselben von verschiedenen Kräften angegriffen werden; nämlich

1) von äußern Kräften, welche — für jeden Punct auf eine einzige Resultante reducirt — durch F', F'', F''', ... ausgedrückt sein sollen;

2) von innern Kräften, welche sich nach der in Nr. 276 angenommenen Bezeichnung darstellen lassen wie folgt:

für den Punct m': $f'_{,,}$, $f'_{,,,}$, ...
für den Punct m'': $f''_{,}$, $f''_{,,,}$, ...

u. s. f.

Man versetze in Gedanken den Punct m' in eine unendlich nahe Nachbarlage n', ohne die Widerstände zu berücksichtigen welche die umgebenden Puncte oder Körper einer thatsächlichen Verrückung entgegensetzen könnten, und nehme an, daß die auf den Punct m' wirkenden Kräfte F', $f'_{,,}$, $f'_{,,,}$, ... ihn bei dieser blos *gedachten* Bewegung begleiten, die man *virtuelle Bewegung* nennt.

Aus dieser Verrückung folgt für jede der am Puncte m' thätigen Kräfte eine elementare Arbeit, welche wir *virtuelle Arbeit* nennen; die Summe aller dieser Arbeiten ist genau null, weil die Gesammtarbeit mehrerer auf einen Punct wirkenden Kräfte der Arbeit ihrer Resultante gleichsteht (215), hier aber die Resultante der Kräfte, welche den Punct m' während seiner

ideellen Bewegung angreifen, null ist. Ersetzt man also die Worte „virtuelle Arbeit" durch das Zeichen $\mathfrak{T}_v$, so hat man

$$\mathfrak{T}_v F' + \mathfrak{T}_v f'_{''} + \mathfrak{T}_v f'_{'''} + \ldots = 0. \qquad [101]$$

Oder in anderer Ausdrucksform: Legt man durch den Punct m' des Systems einen unendlich kleinen Bogen m'n' oder ds' in beliebiger Richtung, so gilt immer die Relation

$$F'ds'\cos(F'; ds') + f'_{''}ds'\cos(f'_{''}, ds') + f'_{'''}ds'\cos(f'_{'''}, ds') + \ldots = 0,$$

und dieß ist für sich klar; denn nach Wegschaffung des gemeinschaftlichen Factors ds' sagt diese Gleichung aus, daß, wenn mehrere Kräfte am nämlichen Angriffspunct im Gleichgewicht sind, die algebraische Summe ihrer Projectionen auf eine Axe null ist, welche Richtung man auch dieser Axe geben möge (335).

Was wir soeben mit dem Elemente m' vorgenommen haben, wiederholen wir nun bei jedem andern Puncte des Systems, indem wir in der Einbildung jeden Punct eine unendlich kleine Verschiebung eingehen lassen, welche von vornherein ganz beliebig, und folglich unabhängig von der ideellen Bewegung der übrigen Puncte angenommen wird. Man erhält so für jeden Punct eine ähnliche Gleichung wie [101]; nämlich

für m'': $\mathfrak{T}_v F'' + \mathfrak{T}_v f''_{'} + \mathfrak{T}_v f''_{'''} + \ldots = 0$

für m''': $\mathfrak{T}_v F''' + \mathfrak{T}_v f'''_{'} + \mathfrak{T}_v f'''_{''} + \ldots = 0,$

u. s. f. für alle Puncte des Systems.

Werden alle diese Gleichungen addirt, und die sämmtlichen virtuellen Arbeiten äußerer Kräfte, so wie die virtuellen Arbeiten aller innern Kräfte, je unter eine einzige Bezeichnung zusammengefaßt, so erhält man die allgemeine Formel

$$\Sigma\mathfrak{T}_v F + \Sigma\mathfrak{T}_v f = 0, \qquad [102]$$

d. h. *die algebraische Summe aus den virtuellen Arbeiten aller, sowohl äußerer als innerer Kräfte ist null, wenn Gleichgewicht besteht.*

Wir hätten diese Formel unmittelbar anschreiben können, vermöge des Gleichgewichtszustands von jedem einzelnen Puncte, wenn wir nicht, um mehrerer Deutlichkeit willen, vorgezogen hätten, in die voranstehenden Einzelheiten einzugehen.

343. Um jetzt die Formel [102] von der Betrachtung der innern Kräfte frei zu machen, darf man nur bemerken, daß *es unter allen den virtuellen Bewegungen, welche man sich einbilden kann, unendlich viele gibt bei denen die gesammte virtuelle Arbeit der*

wechselseitigen Kräfte null ist; dieß sind nämlich solche Bewegungen, bei denen die gegenseitigen Distanzen zwischen den Elementen des Systems sich nicht ändern (290); mit andern Worten: es sind diejenigen virtuellen Bewegungen, welche sich mit der Hypothese vollkommener Starrheit des Systems vertragen.

Werden die dem materiellen System ertheilten virtuellen Bewegungen nur auf Bewegungen solcher Art beschränkt, so reducirt sich die Gleichung [102] auf folgende:

$$\Sigma \mathfrak{T}_v F = 0, \qquad [103]$$

d. h. bei jeder virtuellen Bewegung, welche sich mit der Hypothese einer vollkommenen Starrheit des Systems vereinbaren läßt, ist die algebraische Summe aus den virtuellen Arbeiten der äußern Kräfte null, wenn Gleichgewicht besteht.

Dieß ist die Formel auf welche zu Ende der Nr. 341 hingedeutet wurde.

344. Die Umkehrung dieses Satzes wäre nicht mehr wahr für biegsame Körper, oder allgemeiner für Systeme welche unter der Wirkung äußerer Kräfte Umgestaltungen erfahren können; es ist z. B. möglich, daß ein solches System zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften ausgesetzt und doch nicht im Gleichgewichte ist, obschon die in der Formel [103] liegende Bedingung hier erfüllt wird (117).

Nimmt man aber das Dasein vollkommen starrer Körper an, so ist die Umkehrung des soeben ausgesprochenen Fundamentalsatzes streng richtig; nämlich:

Damit ein starrer Körper im Gleichgewicht sei (d. h. damit er, wenn er anfangs in Ruhe ist, in diesem Zustande bleibe), ist hinreichend, daß bei allen virtuellen Bewegungen dieses Körpers die gesammte Arbeit der äußern Kräfte null gibt.

In der That müßte der Körper, wenn er, anfänglich in Ruhe, sich in Bewegung setzen würde, in einer sehr kurzen Zeit eine sehr kleine aber reelle lebendige Potenz erlangen, was unmöglich ist (290), da die Gesammtarbeit der äußern Kräfte als null vorausgesetzt wird, und die Arbeit der innern Wechselkräfte bei der angenommenen Starrheit des Systems ebenfalls null ist (291).

345. Die beiden eben bewiesenen Sätze lassen sich in folgender Form zusammenfassen.

Fundamental-Lehrsatz der allgemeinen Statik.

Damit ein starrer Körper im Gleichgewicht sei, ist nothwendig und hinreichend, daß die algebraische Summe aus den

virtuellen Arbeiten der äußern Kräfte bei allen mit der Bedingung der Starrheit verträglichen Bewegungen des Körpers null ist.

Ist der Körper oder das materielle System, welchem die Betrachtung gilt, einer Formänderung fähig, so ist die Erfüllung der nämlichen allgemeinen Bedingungen für sein Gleichgewicht nothwendig, aber nicht hinreichend.

346. Anmerkung. In der Gleichung [103] der virtuellen Arbeit ist jeder Summand unendlich klein, weil er die Form $Fds \cos(F, ds)$ hat; dividirt man aber alle diese Summanden durch einen der unendlich kleinen Wege ds', ds'', ds''' 2c., so bleiben in der Gleichung nur noch endliche Größen, nämlich die Kräfte, die Cosinus ihrer Winkel mit den Tangenten der Bögen ds', ds'', ds''' 2c., und endlich die Verhältnisse dieser verschiedenen Bögen zu einem derselben. Man begreift daher, daß die Formel [103] zu numerischen und geometrischen Relationen zwischen den äußern Kräften führen muß, welche ein System während seines Gleichgewichtszustandes angreifen. Dieß wird sich im folgenden Paragraphen zeigen.

Die erwähnten Relationen, welche keine unendlich kleinen Größen mehr enthalten und auch von der Vorstellung einer virtuellen Bewegung völlig frei sind, heißen Gleichgewichts-Gleichungen.

§. 3. Von den zwei einfachsten Arten allgemeiner Gleichgewichts-Gleichungen.

347. Unter den virtuellen Bewegungen welche man sich vorstellen kann, sind die einfachsten die geradlinigen Translationen (45) und die Rotationen um eine feste Axe (47). Jede mit der vollkommenen Starrheit des Systems vereinbare Bewegung solcher Art gibt als Summe für die virtuellen Arbeiten der äußern Kräfte ein leicht auszudrückendes Resultat.

Gleichungen welche aus virtueller Translationsbewegung folgen.

348. Bei einer Translationsbewegung, welche parallel mit einer beliebigen Axe Ou vor sich geht, beschreiben die Angriffspuncte aller Kräfte gleiche und parallele Wege, und die rechtwinkeligen Projectionen der Kräfte $F', F'', \ldots$ auf die Verlängerungen dieser Wege sind ihren Projectionen $F'_u, F''_u, \ldots$ auf die Axe Ou gleich. Wenn daher du die Strecke anzeigt um welche man

sich die sämmtlichen Puncte verrückt denkt, so ist die virtuelle Gesammtarbeit der Kräfte (118)

$$\Sigma du F_u \qquad \text{oder} \qquad du \Sigma F_u.$$

Da diese algebraische Summe bei jeder beliebigen Lage der Axe Ou null sein muß, so hat man, nach Wegschaffung des gemeinschaftlichen Factors du, die Gleichung

$$\Sigma F_u = 0 \qquad \text{oder} \qquad \Sigma F . \cos (F, Ou) = 0.$$

Im Falle des Gleichgewichts ist also die algebraische Summe aus den Projectionen der äußern Kräfte auf irgend eine Axe gleich null; und dieß erfordert 1) daß ein Theil dieser Kräfte spitze, der andere Theil stumpfe Winkel mit der betrachteten Axe mache; 2) daß die absolute Summe aus den Projectionen der erstern Kräfte gleich der absoluten Summe aus den Projectionen der letztern sei.

349. Diese Eigenschaft der Kräfte im Gleichgewicht hängt blos von deren Intensität und von den Winkeln ab, welche sie unter einander einschließen; nicht aber von den gegenseitigen Distanzen zwischen ihren Angriffspuncten. Die algebraische Summe ihrer Projectionen auf eine beliebige Axe würde sich nicht ändern, wenn man in Gedanken die Kräfte parallel zu ihren Richtungen an einen gemeinsamen Angriffspunct verlegen wollte. Nun weiß man, daß die auf solche Art verlegten Kräfte eine einzige Resultante haben (202), welche die Translationsresultante der ursprünglichen Kräfte heißt (284), und deren Projection auf irgend eine Axe gleich der Summe aus den Projectionen der Composanten ist (203).

Die Formel $\Sigma F_u = 0$ sagt daher aus, daß die auf irgend eine Axe bezogene Projection der Translationsresultante für Kräfte, welche sich im Gleichgewicht halten, null ist.

350. Wird diese Bedingung für drei Axen erfüllt welche nicht einer und derselben Ebene parallel sind, so ist klar, daß man hieraus zu schließen berechtigt ist, sie erfülle sich überhaupt für jede beliebige Axe. Es seien nämlich Ox, Oy, Oz jene drei Axen. Ist $\Sigma F_x = 0$, so schließt man, daß die Translationsresultante einen rechten Winkel mit der Axe Ox bildet, wofern sie nicht null ist. Ist gleichzeitig $\Sigma F_y = 0$, so folgt, daß die Translationsresultante senkrecht auf der Ebene xOy steht oder null ist. Hat man endlich noch $\Sigma F_z = 0$, so muß die Translationsresultante, da sie nicht zu drei Axen zugleich senkrecht sein kann, nothwendig null sein; und deshalb muß dann auch ihre Projection auf jede beliebige andere Axe null sein. Um also sicher sein zu können, daß jede Gleichung $du \Sigma F_u = 0$ oder $\Sigma F_u = 0$,

welche aus irgend einer Translationsbewegung hergeleitet ist, befriedigt werde, reicht hin daß die drei Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0 \qquad [104]$$

gelten, deren jede von den beiden andern verschieden ist.

Gleichungen welche aus virtueller Rotationsbewegung folgen.

351. Bei der Rotation des Systems um eine Axe Ou beschreiben alle Puncte, unter Beibehaltung ihrer Distanzen unter sich und von dieser Axe, Kreisbögen, welche sich verhalten wie ihre Halbmesser; und die Summe der virtuellen Arbeiten der Kräfte ist, nach Nr. 121, ausgedrückt durch die Formel

$$d\sigma\, \Sigma \mathfrak{M}_{Ou} F.$$

Da diese Summe null sein soll, wie auch die Axe Ou liegen möge, so hat man, nach Wegschaffung des gemeinschaftlichen Factors $d\sigma$, die Gleichung

$$\Sigma \mathfrak{M}_{Ou} F = 0.$$

Im Falle des Gleichgewichts ist also die algebraische Summe aus den Momenten der äußern Kräfte in Beziehung auf eine beliebige Axe gleich null; d. h.:

1) Hat man eine Axe beliebig gewählt, und den einen Drehungs-Sinn als positiven festgesetzt, so muß es unter den Kräften solche geben, deren Arbeit positiv ist, wenn die virtuelle Bewegung in diesem Sinne erfolgt, und andere, deren Arbeit negativ ist; was man auch so ausdrückt, daß man sagt, gewisse Kräfte suchen das System in dem einen Sinne zu drehen und andere im entgegengesetzten Sinne.

2) Die absolute Summe aus den Momenten der ersteren Kräfte muß der absoluten Summe aus den Momenten der letztern gleich sein.

352. Die Anwendung dieser allgemeinen Regel auf drei Axen Ox, Oy, Oz führt zu den Gleichungen

$$\Sigma \mathfrak{M}_{Ox} F = 0, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{Oy} F = 0, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{Oz} F = 0. \qquad [105]$$

353. Diese drei Gleichungen sind offenbar von denen der Nr. 350 verschieden; denn die Momente der Kräfte hängen von deren Lage im Raume ab. Sie sind aber auch unter sich verschieden; denn lägen z. B. die Kräfte F sämmtlich in der Ebene xOy, so würden die beiden erstern Gleichungen befriedigt werden, während die dritte unbefriedigt bleiben könnte.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob es möglich sei, eine weitere, neue Gleichgewichtsbedingung mittels einer virtuellen Bewegung zu erhalten welche

von den sechs einfachen Bewegungen, denen wir die vorstehenden Gleichungen verdanken, verschieden ist. Diese Frage, welche durch Betrachtungen der analytischen Geometrie beantwortet werden könnte, läßt sich auf einfachere Weise durch die Theorie der äquivalenten Kräfte lösen, mit der sich der folgende Paragraph beschäftigen wird.

§. 4. Von den äquivalenten Kräften, welche einen starren Körper angreifen, oder überhaupt ein System, dessen virtuelle Bewegungen mit der Voraussetzung der Starrheit vereinbar sind.

354. Wird irgend ein System von äußern Kräften angegriffen, so bleibt bei jeder mit der Starrheit dieses Systems verträglichen virtuellen Bewegung die Summe der virtuellen Arbeit unverändert, wenn man Kräfte zulegt oder hinwegnimmt welche unter sich im Gleichgewicht sind, d. h. Kräfte, deren virtuelle Arbeiten bei jeder mit der Starrheit des Systems verträglichen Bewegung sich algebraisch aufheben (343). Namentlich aber wird jene Arbeitssumme in folgenden besondern Fällen ihren alten Werth behalten:

1) Wenn man eine Kraft an die Stelle ihrer am nämlichen Puncte wirkenden Composanten setzt, oder umgekehrt (215).

2) Wenn man zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte neu einführt oder wegläßt, welche entweder einen und denselben Punct angreifen, oder verschiedene Puncte deren Distanz während der angenommenen Bewegung unveränderlich ist (117).

3) Wenn man eine Kraft, ohne ihre Intensität und den Sinn ihrer Wirkung zu ändern, von einem Puncte nach einem andern Puncte derjenigen Geraden verlegt, längs welcher die Kraft wirkt. Denn die Verlegung der Kraft F von A nach B (Fig. 44) läuft darauf hinaus, daß man am Puncte B zwei ebensogroße Kräfte F′, F″ so anbringt wie die Figur andeutet, und dann die beiden Kräfte F, F″, auf welche der zweite Fall paßt, wegläßt.

355. Anmerkung. Obgleich in der Natur die Kräfte immer auf materielle Puncte wirken, so darf dennoch, wenn bei Betrachtung der virtuellen Arbeiten eine Kraft von einem Puncte nach einem andern verlegt werden soll, dieser letztere auch ein blos geometrischer Punct sein, dessen Distanzen von den materiellen Elementen des Systems unveränderlich bleiben. In der That wissen wir ja, daß die virtuellen Arbeiten nur in unserer Einbildung existiren und mit den Massen der Angriffspuncte in keiner Beziehung stehen; sie sind überhaupt nichts weiter als ein Mittel, zu numerischen und geometrischen Relationen zwischen den äußern Kräften zu gelangen, welche ein System im Gleichgewichtszustande angreifen.

356. Definitionen. Wenn Kräfte, welche auf ein System von Puncten wirken, durch Umänderungen beliebiger Art mit andern Kräften vertauscht worden sind oder vertauscht werden können, ohne daß sich die virtuelle Arbeit für irgend eine mit der Starrheit des Systems verträgliche Bewegung ändert, so sagt man, die letztern Kräfte seien den erstern **äquivalent**, oder besser, die beiden Kräfte-Systeme seien äquivalent.

Lassen sich alle Kräfte auf eine einzige äquivalente Kraft zurückführen, so ist diese ihre **Resultante**.

357. Anmerkung. Wenn Kräfte an einem Körper oder materiellen System im Gleichgewichte sind, so ist jede derselben gleich und entgegengesetzt der Resultante aller übrigen; denn da die algebraische Summe der Arbeiten aller Kräfte in einer beliebigen virtuellen Bewegung null ist (343), so ist die Arbeit einer einzelnen dieser Kräfte der Summe aus den Arbeiten aller andern gleich und im Zeichen entgegengesetzt, woraus folgt daß die virtuelle Arbeit ihrer Gegenkraft dieser Summe gleich und mit ihr vom nämlichen Zeichen wäre.

Allgemeiner: Wenn man Kräfte, welche an einem starren Körper im Gleichgewicht sind, in zwei Gruppen $P', P'', \ldots P^{(m)}$; $F', F'', \ldots F^{(m)}$ abtheilt, und sich andere Kräfte $F'_1, F''_1, F_1^{(m)}$ denkt welche den Kräften $P', P'', \ldots P^{(m)}$ der ersten Gruppe gleich und entgegengesetzt sind, so ist die zweite Gruppe $F', F'', \ldots F^{(m)}$ der dritten $F'_1, F''_1, \ldots F_1^{(m)}$ äquivalent; denn nach der Voraussetzung wird in einer beliebigen virtuellen Bewegung die gesammte Arbeit der Kräfte $F', F'', \ldots$ gleich der Arbeit der Kräfte $P', P'' \ldots$, aber vom entgegengesetzten Zeichen sein, und mithin nach Werth und Zeichen gleich der Arbeit der Kräfte $F'_1, F''_1, \ldots$

Es ist leicht zu sehen, daß auch die Umkehrung dieses Satzes gilt; d. h. wenn zwei Kräftesysteme äquivalent sind, so würden die Kräfte eines jeden Systems denen des andern das Gleichgewicht halten, wenn man die letztern in entgegengesetztem Sinne nähme.

358. Lehrsatz. Wenn zwei Gruppen von Kräften $F', F'' \ldots$; $F'_1, F''_1, \ldots$ äquivalent sind, so ist sowohl die Summe aus den Projectionen der Kräfte auf eine Axe, als auch die Summe ihrer Momente bezüglich irgend einer Axe die nämliche für beide Gruppen.

In der That geben für eine beliebige virtuelle Bewegung die Arbeiten beider Kräftegruppen die nämliche algebraische Summe. Nun ist aber

1) bei virtueller Translationsbewegung, parallel mit irgend einer Axe Ou,

die Gesammtarbeit der Kräfte F ausgedrückt durch $du\Sigma F_u$ (348), und die der Kräfte F_1 durch $du\,\Sigma F_{1u}$, woraus man schließt

$$\Sigma F_u = \Sigma F_{1u}.$$

2) Bei virtueller Rotationsbewegung um Ou ist $d\sigma\Sigma\mathfrak{M}_{0u}F$ die Gesammtarbeit der Kräfte F (351), und $d\sigma\Sigma\mathfrak{M}_{0u}F_1$ die der Kräfte F_1; hieraus folgt

$$\Sigma\mathfrak{M}_{0u}F = \Sigma\mathfrak{M}_{0u}F_1.$$

359. Zusatz. Aus der Gleichung $\Sigma F_u = \Sigma F_{1u}$, angewandt auf drei verschiedene Axen, und aus den in Nr. 349 in Erinnerung gebrachten Eigenschaften der Translationsresultante schließt man, daß zwei Gruppen äquivalenter Kräfte die nämliche Translationsresultante haben.

360. Lehrsatz. Beliebig viele Kräfte F', F'', F''', ... $F^{(n)}$ können nach unendlich vielen Arten auf zwei ihnen äquivalente Kräfte zurückgeführt werden, von denen wenigstens eine durch einen beliebig gegebenen Punct O geht, während die andere in einer bestimmten, von der Wahl des Puncts O abhängigen Ebene liegt, welche zugleich den Punct O enthält.

Beweis. 1) Zwei Ebenen, von denen die eine durch die Kraft F' und den Punct O, die andere durch die Kraft F'' und O geht, schneiden sich nach einer Geraden OK'' (Fig. 45).

Die am Puncte M' angebrachte Kraft F' kann durch zwei in der Ebene $M'OK''$ liegende Composanten P', Q' ersetzt werden (354), von denen die eine durch O geht, die andere durch einen auf der Schnittlinie OK'' willkürlich gewählten Punct K'' (207); eben so läßt sich die den Punct M'' angreifende Kraft F'' durch die Kräfte P'' (welche mit OK'' in einerlei Ebene liegt) und Q'' ersetzen, deren Richtungen durch O und K'' gehen. Den nach O verlegten Kräften P', P'' substituirt man ihre Resultante S'', sowie den nach K'' verlegten Kräften Q', Q'' ihre Resultante T''. Man hat dann ebensoviele Kräfte wie zu Anfang; aber die eine S'' geht durch den gegebenen Punct O, und es bleiben nur noch $n - 1$ welche nicht nothwendig durch O gehen müssen, nämlich T'', F''', F^{IV}, ... $F^{(n)}$.

Man behandelt jetzt die Kräfte T'' und F''' auf dieselbe Art wie vorhin die Kräfte F' und F''; von den beiden neuen Kräften, die man als Ersatz für jene erhält, setzt man die durch O gehende mit S'' zusammen und gelangt hiemit zu einer einzigen an O wirkenden Kraft, so daß die Zahl der nicht durch O gehenden Kräfte wieder um 1 vermindert erscheint. In dieser Weise fährt man fort, und reducirt zuletzt sämmtliche Kräfte auf zwei, S, T, von denen wenigstens die erste durch den Punct O geht. Und diese beiden Kräfte S, T sind den Kräften F', F'', F''', ... $F^{(n)}$ äquivalent, d. h. bei

jeder virtuellen Bewegung, in welcher sowohl das System der ursprünglichen Angriffspuncte als das der beiden neuen Angriffspuncte starr bleibt, ist die vereinte Arbeit der Kräfte S, T gleich der Gesammtarbeit der ursprünglichen Kräfte.

Sind auf diese Art zwei äquivalente Kräfte S, T gefunden, und faßt man die durch O und T gehende Ebene in's Auge, so kann man die Kraft T mit zwei neuen Kräften vertauschen, deren eine durch O geht und sich mit S zusammensetzt, deren andere aber durch einen beliebigen Punct jener Ebene gelegt ist; woraus hervorgeht, daß dem ersten Theil des obigen Satzes auf unendlich viele Arten entsprochen werden kann.

2) S' und T', dann S und T seien zwei einander äquivalente Kräftepaare; es soll gezeigt werden, daß, wenn die beiden Kräfte S, S' durch einen Punct O gehen, die beiden andern T, T' in einer Ebene liegen welche den Punct O enthält. Behufs des Beweises ziehen wir in der durch O und T bestimmten Ebene zwei Axen Ox, Oy. In Beziehung auf jede dieser Axen haben die beiden äquivalenten Paare einerlei Momenten-Summe (358). Nun sind die Momente der Kräfte S, T, S' null (122); daher ist auch das Moment von T' null; T' liegt also in einerlei Ebene mit jeder der Axen Ox, Oy (122), d. h. sie liegt in der Ebene welche durch den Punct O und die Kraft T bestimmt wird. Dadurch ist der zweite Theil des Lehrsatzes bewiesen.

Anmerkung. — Den beiden Kräften T, T' kommt eine Eigenschaft zu, welche hervorgehoben zu werden verdient. Denkt man sich eine Axe Oz senkrecht zu der Ebene xOy in welcher diese Kräfte liegen, so haben ihre Momente bezüglich dieser Axe gleichen Werth und gleichen Sinn (358), da die Momente von S und S' wieder null sind. Mit andern Worten: die Producte aus je einer der Kräfte T, T' und ihrem Abstande vom Punct O sind einander gleich, und die eine dieser Kräfte würde einen starren Körper, der mit der Axe Oz in Verbindung steht, um diese Axe in demselben Sinne zu drehen suchen wie die andere.

§. 5. Von den sechs Gleichungen, welche hinreichen um das Gleichgewicht eines starren Systems zu bedingen.

361. Wir wissen (341), daß die vollständigen Bedingungen für das Gleichgewicht eines mehr oder weniger biegsamen Körpers oder materiellen Systems von dessen physischer Constitution abhängt; daß aber in allen Fällen die äußern Kräfte gewissen Relationen genügen müssen, welche von dieser Constitution unabhängig sind und sämmtlich von der Formel [103] der virtuellen Arbeit (343) umfaßt werden. Jetzt sind wir im Stande, nachzuweisen, daß sich die in der Formel enthaltenen Bedingungen auf die sechs Gleichungen in Nr. 350 u. 352 beschränken.

362. Durch einen willkürlich gewählten Punct O denke man sich drei Axen Ox, Oy, Oz gezogen, welche nicht in einerlei Ebene liegen, übrigens beliebige Winkel einschließen.

Ein System, dessen Gestalt während der ihm beigelegten virtuellen Bewegungen unveränderlich bleibt, sei von irgendwelchen Kräften F', F'', F''', ... angegriffen. Diese Kräfte sind, wie (360) bewiesen wurde, in Rücksicht der Arbeit zweien Kräften äquivalent, von denen die eine S durch den Punct O geht, die andere T aber nicht durch ihn zu gehen braucht.

Befriedigen nun die Kräfte F', F'', F''' ... die Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0,$$

so muß ihre Translationsresultante null sein (350); folglich ist auch die Translationsresultante der Kräfte S und T null (359), d. h. diese beiden Kräfte sind einander gleich, parallel und von entgegengesetztem Sinne.

Zwei solche Kräfte — wenn sie nicht auf eine und dieselbe Gerade fallen — bilden ein G e g e n p a a r, oder, nach P o i n s o t's ursprünglicher Benennung, eine K o p p e l (couple) von Kräften.

W e n n a l s o d i e S u m m e n a u s d e n P r o j e c t i o n e n b e l i e b i g v i e l e r K r ä f t e a u f d r e i A x e n e i n z e l n n u l l s i n d, s o k ö n n e n d i e s e K r ä f t e a u f e i n ä q u i v a l e n t e s G e g e n p a a r r e d u c i r t w e r d e n.

363. Wenn dagegen die Kräfte F', F'', F''', ... die erste der drei Momentengleichungen (352) befriedigen, nämlich

$$\Sigma \mathfrak{M}_{Ox} F = 0,$$

so muß, nach dem zweiten Theile des Lehrsatzes in Nr. 358, die Summe aus den Momenten der äquivalenten Kräfte S, T bezüglich derselben Axe Ox ebenfalls null sein; da nun aber das Moment der durch den Punct O gehenden Kraft S null ist (122), so ist nothwendig auch das Moment von T null, und folglich (122) liegt diese Kraft T in einerlei Ebene mit der Axe Ox.

Gilt zu gleicher Zeit die Gleichung

$$\Sigma \mathfrak{M}_{Oy} F = 0,$$

so schließt man auf dieselbe Weise, daß die zweite T der äquivalenten Kräfte auch in einerlei Ebene mit der Axe Oy, folglich in der Ebene xOy liegt, wenn sie nicht etwa durch den Punct O geht.

Besteht endlich neben den beiden obigen Gleichungen auch noch die dritte

$$\Sigma \mathfrak{M}_{Oz} F = 0,$$

so muß die zweite Aequivalente T durch den Punct O gehen; denn außerdem könnte sie nicht mit jeder der drei Axen in einerlei Ebene liegen. Da somit hier b e i d e Aequivalenten S, T durch O gehen, so kommen sie auf eine

einzige Aequivalente zurück, d. h. auf eine durch jenen Punct gehende Resultante.

Wenn also die Summen aus den Momenten beliebig vieler Kräfte in Beziehung auf drei aus einem Puncte entspringende Axen einzeln null sind, so können diese Kräfte auf eine einzige Resultante reducirt werden, welche durch den Ursprung des Axensystems geht.

364. Genügen die Kräfte gleichzeitig den sechs Gleichungen

$$[104] \qquad \Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0,$$

$$[105] \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F = 0, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F = 0, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F = 0,$$

so folgt aus dem Vorigen, daß dann die beiden Aequivalenten S, T einander gleich und entgegengesetzt sind, und folglich sich auf Null reduciren.

Diese sechs Gleichungen reichen also hin, um darzuthun (353), daß bei allen virtuellen Bewegungen, welche sich mit der Starrheit des Systems vertragen, die Arbeit der Kräfte F null ist, und daß folglich das materielle System, wenn es starr und in Ruhe ist, in diesem Zustande verharrt; man sagt, es sei im Gleichgewicht unter der Einwirkung von Kräften.

Die Anzahl der für das Gleichgewicht eines starren Körpers nothwendigen und hinreichenden Bedingungen beträgt also sechs; drei derselben bestehen darin, daß auf jeder von drei Axen, welche nicht zur nämlichen Ebene parallel sind, die algebraische Summe aus den Projectionen der äußern Kräfte null ist; die drei andern aber darin, daß in Beziehung auf jede von drei Axen, welche sich in einem Puncte schneiden und nicht in einer Ebene liegen, die algebraische Summe aus den Momenten der äußern Kräfte null ist.

Man wird bemerkt haben (oder wird bei einem achtsamen Rückblick auf die den sechs Gleichungen [104] und [105] zu Grunde liegenden Betrachtungen leicht die Ueberzeugung gewinnen), daß die Projectionsaxen der x, der y und der z, auf welche sich die drei ersten Gleichungen [104] beziehen, nicht dieselben sein müssen wie die Momentenaxen Ox, Oy, Oz, auf welche die drei letzten Gleichungen [105] bezogen sind.

§. 6. Von den sechs Bedingungen der Aequivalenz zweier Kräfte-Systeme.

365. Damit eine Gruppe von Kräften F', F'', F''', ... einer andern Gruppe F'_1, F''_1, F'''_1, ... äquivalent sei, ist nothwendig und hinreichend,

daß (357), wenn man sich die Kräfte P', P'', P''' ... denen der zweiten Gruppe gleich und entgegengesetzt denkt, die vereinten Kräfte der ersten und dritten Gruppe den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen genügen; so daß man hat

$$\begin{array}{l|l} \Sigma F_x + \Sigma P_x = 0 & \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F + \Sigma \mathfrak{M}_{0x} P = 0 \\ \Sigma F_y + \Sigma P_y = 0 & \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F + \Sigma \mathfrak{M}_{0y} P = 0 \\ \Sigma F_z + \Sigma P_z = 0 & \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F + \Sigma \mathfrak{M}_{0z} P = 0. \end{array}$$

Der Voraussetzung zufolge sind aber die Projectionen und Momente der Kräfte P den Projectionen und Momenten der Kräfte F_1 beziehlich gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt; daher kommen die vorstehenden sechs Gleichungen auf folgende Formen:

$$\begin{array}{l|l} \Sigma F_x = \Sigma F_{1x} & \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F = \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F_1 \\ \Sigma F_y = \Sigma F_{1y} & \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F = \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F_1 \\ \Sigma F_z = \Sigma F_{1z} & \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F = \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F_1. \end{array}$$

Damit also zwei Systeme von Kräften äquivalent seien, ist nothwendig und hinreichend, daß auf jeder von drei Axen, welche nicht mit einer nämlichen Ebene parallel sind, die Projectionen der Kräfte im einen System dieselbe Summe geben wie im andern; und daß die beiden Kräfte-Systeme einerlei Momenten-Summe haben, in Beziehung auf jede einzelne von drei zusammenlaufenden Axen.

366. Die Anwendung dieses allgemeinen Lehrsatzes auf den besondern Fall, wo die Kräfte F eine Resultante haben, liefert die sechs Gleichungen

$$R_x = \Sigma F_x, \qquad R_y = \Sigma F_y, \qquad R_z = \Sigma F_z,$$

$$\mathfrak{M}_{0x} R = \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F, \quad \mathfrak{M}_{0y} R = \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F, \quad \mathfrak{M}_{0z} R = \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F.$$

Damit also ein System von Kräften eine Resultante habe, ist nothwendig und hinreichend, daß es eine Kraft gebe, deren Projectionen auf drei (nicht zur nämlichen Ebene parallele) Axen, und deren Momente in Beziehung auf drei zusammenlaufende Axen, dieselben Werthe und Zeichen haben wie die betreffenden Summen aus den Projectionen und aus den Momenten der im System enthaltenen Kräfte, hinsichtlich der nämlichen Axen.

§. 7. Analytische Darstellung der sechs Gleichgewichts-Gleichungen und der sechs Aequivalenz-Gleichungen mittels der zu drei Axen parallelen Composanten der Kräfte, und mit Einführung der Coordinaten ihrer Angriffspuncte.*)

367. Gleichungen des Gleichgewichts. — Es seien x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Puncts M, den man auf der Richtung der Kraft F angenommen hat. Diese Kraft zerlegen wir in drei andere, welche den Punct M angreifen und den rechtwinkeligen Axen Ox, Oy, Oz parallel sind; sie seien nach Intensität und Sinn durch die positiven oder negativen Größen X, Y, Z dargestellt, so daß man hat

$$X = F \cos (F, x), \qquad Y = F \cos (F, y), \qquad Z = F \cos (F, z).$$

Geschieht dieß auf gleiche Weise mit allen Kräften welche ein System im Gleichgewicht angreifen, so werden die Gleichungen [104] der Nr. 364 vertreten durch

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0. \qquad [106]$$

In Beziehung auf die Axe der x ist das Moment der Kraft F gleich der Summe aus den Momenten ihrer Composanten Y, Z (358); denn das Moment der Kraft X ist null, da diese zur Axe parallel ist.

Nimmt man nun an, 1) die virtuelle Rotationsbewegung sei von der Art, daß die Axe Oy sich der ursprünglichen Lage von Oz zu nähern suche,**) 2) die Größen Y, Z, y, z seien positiv: so sieht man leicht (Fig. 46), daß

$$\mathfrak{M}_{0x} Z = Zy, \qquad \mathfrak{M}_{0x} Y = - Yz,$$

und folglich

$$\mathfrak{M}_{0x} F = Zy - Yz.$$

Werden aber an dieser Formel alle Annahmen geprüft welche über die Vorzeichen der Composanten Z, Y und der Coordinaten z, y möglich sind, so erkennt man die Formel als eine allgemeine. Daraus folgt, daß sich, wenn mit allen Kräften in derselben Art verfahren wird wie soeben mit der einzelnen Kraft F, die Gleichung ergibt

$$\Sigma \mathfrak{M}_{0x} F = \Sigma (Zy - Yz).$$

---

*) Bei einem ersten Studium kann man diesen Paragraphen überschlagen und unmittelbar zu Nr. 372 übergehen.

**) Für diesen und für ähnliche spätere Fälle ist vielleicht die Erinnerung nicht undienlich, daß unter Ox, Oy, Oz immer zunächst die positiven Stücke der Axen gemeint sind (GL. 7, 13).

Um die analogen Ausdrücke für die Summen der Momente bezüglich der Axen Oy und Oz zu erhalten, hat man in obiger Formel zuerst x mit y, y mit z, z mit x, Z mit X, Y mit Z zu vertauschen (d. i. jeden Buchstaben mit dem folgenden, in der Ordnung x, y, z, x), und hierauf noch eine zweite ähnliche Vertauschung vorzunehmen. Die drei für das Gleichgewicht nothwendigen Momentengleichungen werden sonach in neue Formen übergeführt; nämlich

$$\left.\begin{array}{llll} \text{statt} & \Sigma \mathfrak{M}_{0x} F = 0 & \text{steht} & \Sigma(Zy - Yz) = 0 \\ \text{„} & \Sigma \mathfrak{M}_{0y} F = 0 & \text{„} & \Sigma(Xz - Zx) = 0 \\ \text{„} & \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F = 0 & \text{„} & \Sigma(Yx - Xy) = 0. \end{array}\right\} \quad [107]$$

368. In der vorigen Nummer wurden die Axen Ox, Oy, Oz rechtwinkelig angenommen. Die obigen sechs Gleichungen [106] und [107] drücken aber auch dann noch die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Gleichgewichts eines starren Systems aus, wenn die Coordiaten x, y, z für die Angriffspuncte der Kräfte auf irgend drei schiefwinkelige Axen bezogen werden und die Composanten X, Y, Z diesen Axen parallel sind.

Zunächst sagen die drei erstern Gleichungen, daß die Translationsresultante null sei (350). In beiden Axensystemen sind die Summen ΣX, ΣY, ΣZ drei zusammenstoßende Kanten eines Parallelepipeds, dessen Diagonale die Resultante ist. Damit diese null sei, ist nothwendig und hinreichend daß die drei Kanten null seien.

Nun hat man noch zu untersuchen, was im Falle schiefwinkeliger Axen aus den Momentengleichungen wird. Diese Axen seien Ox_1, Oy_1, Oz_1. Daneben denke man sich drei rechtwinkelige Axen Ox, Oy, Oz mit gleichem Ursprung, deren eine Ox auf Ox_1 fällt. Sind, wie früher, x, y, z die Coordinaten für den auf der Richtung der Kraft F angenommenen Punct M im letzteren Axensystem, und X, Y, Z die rechtwinkeligen Composanten oder Projectionen der Kraft F, so ist bekanntlich das Moment dieser Kraft in Beziehung auf die Axe Ox oder Ox_1 durch $Zy - Yz$ ausgedrückt.

Bezeichnet man durch x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des nämlichen Puncts M in dem Systeme der schiefwinkeligen Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1, und durch X_1, Y_1, Z_1 die schiefwinkeligen Composanten oder Projectionen der Kraft F auf dieselben Axen, so hat man nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Projectionen (GL. 48):

$$y = x_1 \cos(x_1, y) + y_1 \cos(y_1, y) + z_1 \cos(z_1, y),$$

$$z = x_1 \cos(x_1, z) + y_1 \cos(y_1, z) + z_1 \cos(z_1, z),$$

$$Z = X_1 \cos(x_1, z) + Y_1 \cos(y_1, z) + Z_1 \cos(z_1, z),$$

$$Y = X_1 \cos(x_1, y) + Y_1 \cos(y_1, y) + Z_1 \cos(z_1, y).$$

In diesen Gleichungen reduciren sich sofort die rechtsstehenden Summen auf ihre beiden letzten Summanden, da die Winkel $(x_1, y), (x_1, z)$ rechte und ihre Cosinus also null sind. Da aber die Oy, Oz nach Willkühr genommen werden können, wenn sie nur unter sich und mit Ox oder Ox_1 rechte Winkel bilden, so benützen wir diese Unbestimmtheit zu einer weitern Vereinfachung der vier Gleichungen, indem wir die Axe Oy in die Ebene x_1Oy_1 verlegen, wodurch die Axe Oz senkrecht zu dieser Ebene wird. Dann ist $\cos(y_1, z) = 0$. Sonach lassen sich die obigen vier Ausdrücke schreiben wie folgt:

$$y = y_1 \cos(y_1, y) + z_1 \cos(z_1, y), \qquad z = z_1 \cos(z_1, z),$$

$$Y = Y_1 \cos(y_1, y) + Z_1 \cos(z_1, y), \qquad Z = Z_1 \cos(z_1, z),$$

(was sich auch leicht mit Hülfe einer Figur nachweisen läßt); und durch Substitution in der für das Moment der Kraft F geltenden Formel $Zy - Yz$ erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\mathfrak{M}_{Ox_1}F = Zy - Yz = (Z_1y_1 - Y_1z_1) \cos(y_1, y) \cos(z_1, z).$$

Der Coefficient $\cos(y_1, y) \cos(z_1, z)$ ist niemals null; denn der Winkel (y_1, y) ist das Complement des Winkels x_1Oy_1 und kann kein rechter werden, da sonst die Axen Ox_1, Oy_1 in eine und dieselbe Gerade zusammenfallen würden; der Winkel (z_1, z) ist das Complement des Winkels zwischen der Axe Oz_1 und der Ebene x_1Oy_1, und wenn er ein rechter wäre, müßten die Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 in einerlei Ebene liegen.

In dem schiefwinkeligen Axensysteme wird also das Moment einer Kraft in Beziehung auf die Axe Ox_1 durch

$$a(Z_1y_1 - Y_1z_1)$$

ausgedrückt, wobei a ein von den Winkeln der Axen abhängiger Coefficient ist. Mithin ist für eine beliebige Anzahl von Kräften die algebraische Summe ihrer Momente bezüglich der Axe Ox_1

$$a\Sigma(Z_1y_1 - Y_1z_1),$$

und damit diese Größe null sei, ist nothwendig und hinreichend, daß die Gleichung gelte

$$\Sigma(Z_1y_1 - Y_1z_1) = 0.$$

Wird dieses Resultat auch noch auf die beiden andern Axen übergetragen, so sieht man, daß die drei Momentengleichungen, welche für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend sind wenn die Translationsresultante null ist, im Falle schiefwinkeliger Axen genau dieselben Formen [107] haben welche in der vorhergehenden Nummer gefunden wurden.

369. Gleichungen der Aequivalenz. — Dem System der Kräfte $F', F'', F''', \ldots F^{(n)}$ sei das Kräftesystem $F'_1, F''_1, \ldots F_1^{(m)}$ äquivalent.

Durch X, Y, Z seien die mit irgend dreien Coordinatenaxen parallelen Composanten einer beliebigen Kraft des ersten Systems bezeichnet; durch X_1, Y_1, Z_1 die mit den nämlichen Axen parallelen Composanten für eine der Kräfte aus dem zweiten System.

Werden die Kräfte des einen von zwei äquivalenten Systemen in entgegengesetztem Sinn genommen, so halten sie, wie man weiß, den Kräften des andern Systems das Gleichgewicht.

Um daher die Aequivalenz der beiden obengenannten Systeme auszudrücken, hat man nur anzuschreiben, daß die sämmtlichen Kräfte X, Y, Z, vereint mit allen den Kräften $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$ den sechs Gleichungen [106] und [107] der Nr. 367 genügen.

Somit ist die Aequivalenz beider Kräftesysteme durch die folgenden sechs Gleichungen ausgesprochen:

$$\begin{array}{l|l} \Sigma X_1 = \Sigma X, & \Sigma(Z_1 y_1 - Y_1 z_1) = \Sigma(Zy - Yz), \\ \Sigma Z_1 = \Sigma Y, & \Sigma(X_1 z_1 - Z_1 x_1) = \Sigma(Xz - Zx), \\ \Sigma Z_1 = \Sigma Z, & \Sigma(Y_1 x_1 - X_1 y_1) = \Sigma(Yx - Xy). \end{array}$$

370. Haben die in beliebiger Anzahl vorhandenen Kräfte X, Y, Z zusammengenommen eine einzige Aequivalente, d. h. eine Resultante, deren Composanten X_1, Y_1, Z_1 sein werden und deren Richtung den durch die Coordinaten x_1, y_1, z_1 bestimmten Punct enthält, so geben die obigen Formeln die sechs Gleichungen

$$X_1 = \Sigma X, \qquad Y_1 = \Sigma Y, \qquad Z_1 = \Sigma Z. \tag{108}$$

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 y_1 - Y_1 z_1 = \Sigma(Zy - Yz), \\ X_1 z_1 - Z_1 x_1 = \Sigma(Xz - Zx), \\ Y_1 x_1 - X_1 y_1 = \Sigma(Yx - Xy). \end{array}\right\} \tag{109}$$

Die drei ersten derselben liefern die Intensität der Resultante und ihre Lage gegen drei mit den Axen parallele Gerade; die drei letztern sind die Gleichungen für die Projectionen ihrer Richtung auf die Coordinatenebenen.

Damit aber eine solche Resultante wirklich existire, müssen die drei Gleichungen [109] gleichzeitig befriedigt werden können. Stehen die drei Axen senkrecht auf einander, so sind die rechtsstehenden Ausdrücke die Summen aus den Momenten der Kräfte bezüglich dieser Axen; zur Abkürzung mögen daher diese Ausdrücke durch M_x, M_y, M_z bezeichnet sein. Multiplicirt man die erste Gleichung mit X_1 (dem Coefficienten von $-y_1$ in der dritten), die zweite mit Y_1 (dem Coefficienten von $-z_1$ in der ersten), die dritte mit Z_1 (dem Coefficienten von $-x_1$ in der zweiten), und addirt dann alle drei

Gleichungen, so kommt auf der linken Seite Null; und wenn für X_1, Y_1, Z_1 die ihnen gleichen Summen eingesetzt werden, ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$M_x\Sigma X + M_y\Sigma Y + M_z\Sigma Z = 0, \text{*)} \qquad [110]$$

woraus folgt:

Lehrsatz. Hat ein System von Kräften eine Resultante, und berechnet man die drei algebraischen Summen aus den Momenten dieser Kräfte bezüglich dreier rechtwinkeligen Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz, unter der Annahme, daß der positive Sinn der virtuellen Rotation von Ox gegen Oy, von Oy gegen Oz, von Oz gegen Ox gehe, — multiplicirt man endlich jede einzelne Momentensumme mit der Summe aus den Projectionen der Kräfte auf die nämliche Axe welche den betreffenden Momenten zu Grunde liegt: so geben diese drei Producte, addirt, Null.

Dabei ist wohl zu merken, daß, wenn die drei Projections-Summen alle null wären, es keine Resultante geben könnte (362), obwohl der Gleichung [110] Genüge geschehen würde.

371. Umgekehrt: Wird die Gleichung [110] befriedigt, ohne daß die Summen ΣX, ΣY, ΣZ sämmtlich null sind, so gibt es eine Resultante, weil sich sechs Größen X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1 finden lassen welche den sechs Gleichungen [108] und [109] der Nr. 370 genügen.

Es habe z. B. ΣZ einen von Null verschiedenen Werth. Nimmt man z_1 willkürlich an, so zieht man aus [109]

$$y_1 = \frac{M_x + z_1\Sigma Y}{\Sigma Z}, \qquad x_1 = \frac{z_1\Sigma X - M_y}{\Sigma Z};$$

und die sechs Gleichungen der Aequivalenz werden also jedenfalls befriedigt.

§. 8. Erster besonderer Fall: Gegenpaare.

372. Man sieht leicht, daß die Summe der Momente eines Gegenpaares (362) in Beziehung auf eine zu seiner Ebene senkrechte, übrigens

*) Aus der Theorie der Elimination in der Algebra ist bekannt, daß — wenn die drei Größen X_1, Y_1, Z_1 nicht sämmtlich null sind — die Zusammenstellung der Endgleichung [110] mit zweien von den Gleichungen [109] ein neues System von Relationen bildet, welches die nämliche Geltung hat wie das der drei zuletzterwähnten Gleichungen.

beliebige Axe constant ist, nämlich gleich dem Producte aus einer der Kräfte und dem Abstande zwischen beiden Kräften. Das Vorzeichen dieser algebraischen Summe, welche man der Kürze wegen das Moment des Gegenpaares nennt, ist ebenfalls unabhängig von der besondern Stellung der zur Ebene des Paares senkrechten Axe, und bleibt das nämliche für alle virtuellen Rotationsbewegungen vom nämlichen Sinn.

Es seien z. B. P, P′ (Fig. 47) zwei gleiche, parallele Kräfte von entgegengesetztem Sinn. Wir nehmen nach und nach ihre Momente in Beziehung auf verschiedene Axen, welche senkrecht zu ihrer Ebene (der Ebene unserer Figur) stehen, wobei wir voraussetzen daß der Sinn der Drehung immer von rechts abwärts nach links gehe. Die algebraische Summe der Momente ist in Beziehung auf eine zur Linken beider Kräfte angenommene Axe B

$$P \cdot AB - P' \cdot A'B = P(AB - A'B) = P \cdot AA';$$

in Beziehung auf die Axe C zwischen beiden Kräften:

$$P \cdot AC + P' \cdot A'C = P(AC + A'C) = P \cdot AA';$$

bezüglich der Axe D zur Rechten der zwei Kräfte:

$$P' \cdot A'D - P \cdot AD = P(A'D - AD) = P \cdot AA'.$$

373. Ein Gegenpaar (P, — P), welches auf einen starren Körper wirkt, kann nicht durch eine dritte Kraft Q im Gleichgewicht gehalten werden; denn die Translationsresultante der drei Kräfte P, — P, Q kann nicht null sein. *Wohl aber kann Gleichgewicht zwischen zwei Gegenpaaren (P, — P), (Q, — Q) bestehen; und hiezu ist hinreichend, daß ihre Ebenen parallel sind und ihre Momente gleiche Werthe aber entgegengesetzte Zeichen haben.* Dieß sieht man deutlich ein, wenn man (Fig. 48) eine Axe Oz senkrecht zu den Ebenen beider Paare annimmt, und dann die zwei Axen Ox, Oy in der Ebene des Paares (P, — P) so zieht, daß die eine Ox parallel zu den Kräften Q, die andere Oy senkrecht zu diesen Kräften ist. Die sechs Bedingungen des Gleichgewichts werden dann augenscheinlich erfüllt.

Zusatz I. *Zwei Gegenpaare, deren Ebenen parallel sind und deren Momente nach Werth und Zeichen übereinstimmen, sind äquivalent.*

Zusatz II. *Ein Gegenpaar kann immer durch ein ihm äquivalentes Gegenpaar ersetzt werden, dessen eine Kraft eine gegebene Intensität und eine gegebene, mit der Ebene des ersten Paares parallele Richtung hat.*

374. Umgekehrt: Halten sich zwei Gegenpaare im Gleichgewicht, so haben ihre Ebenen parallele Lagen und ihre Momente gleiche Werthe, aber entgegengesetzte Zeichen.

Denn würden ihre Ebenen sich schneiden, so könnte man in der Ebene des ersten Paares eine Momentenaxe annehmen welche die gemeinsame Schnittlinie trifft, und nach diesem Durchschnittspuncte die eine Kraft des zweiten Paares verlegen (373, Zus. II); die Momente für drei einzelne Kräfte wären dann null, das Moment der vierten Kraft aber nicht, da letztere weder der Axe parallel sein noch ihr begegnen kann. Also sind im Falle des Gleichgewichts die Ebenen parallel. — Die Gleichheit der Momente ist eine unmittelbare Folge aus einer der sechs Gleichgewichtsbedingungen.

375. Lehrsatz. Beliebig viele Gegenpaare, welche an einem starren Körper angebracht sind, können, wenn sie sich nicht gegenseitig aufheben, auf ein einziges Gegenpaar zurückgeführt werden. Denn da die Translationsresultante aller einzelnen Kräfte null ist, so können diese durch zwei ihnen äquivalente Kräfte ersetzt werden deren Translationsresultante null ist (359), d. h. durch ein Gegenpaar.

376. Ein System von Kräften läßt sich immer auf ein äquivalentes System zurückführen, welches aus einer durch einen gegebenen Punct gehenden Kraft und einem Gegenpaare besteht.

In der That kann man das ursprüngliche System auf zwei Aequivalente S, T reduciren, von denen die erstere durch einen willkührlich gewählten Punct O geht (360). Werden an diesem Puncte O zwei sich direct entgegenstehende Kräfte T_1 und — T_1 angebracht, welche der Kraft T gleich und parallel sind, so lassen sich die Kräfte S und T_1 zu einer einzigen Kraft R zusammensetzen, während die beiden andern, — T_1 und T, ein Gegenpaar bilden; und dieß war zu beweisen.

Man sieht 1) daß die Kraft R die Translationsresultante ist, und nach jedem beliebigen Puncte O verlegt werden kann, wenn man das Gegenpaar entsprechend ändert; 2) daß, so lange man dem willkührlich angenommenen Puncte O, durch den die Richtung der Kraft R gehen soll, eine und dieselbe Lage beläßt, alle Gegenpaare, welche man anstatt des Paares T, — T_1 erhalten kann, äquivalent sind, d. h. in parallelen Ebenen liegen und gleiche Momente von einerlei Zeichen haben.

§. 9. Zweiter besonderer Fall: Kräfte in einerlei Ebene.

377. Wenn die Kräfte, welche in beliebiger Anzahl einen starren Körper angreifen, in einer und derselben Ebene liegen, so gilt dieß soviel wie drei von den Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts, und für das wirkliche Eintreten des Gleichgewichts haben sich nur noch die drei übrigen Bedingungen zu erfüllen. Nimmt man nämlich die Axen Ox, Oy in der Ebene der Kräfte, so sind die auf diese Axen bezogenen Momente null; und wählt man die Axe Oz senkrecht zur genannten Ebene, so wird die Summe ΣF_z der Projectionen auf diese Axe null. Als nothwendige und hinreichende Bedingungen bleiben also die Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F = 0.$$

Die Größe $\Sigma \mathfrak{M}_{0z} F$ ist die algebraische Summe aus den Momenten der Kräfte in Beziehung auf die zur Ebene der Kräfte senkrechte Axe Oz. Man sagt aber in diesem Falle gewöhnlich, die Momente seien in Beziehung auf den Punct O genommen, in welchem die Axe durch die Ebene der Kräfte geht.

378. Aus den nämlichen Betrachtungen folgt, daß auch die Bedingungen der Aequivalenz für zwei in einer Ebene liegende Systeme von Kräften sich auf drei reduciren, und zwar auf zwei Projectionsgleichungen und eine Momentengleichung; nämlich

$$\Sigma F_x = \Sigma F_{1x}, \qquad \Sigma F_y = \Sigma F_{1y}, \qquad \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F = \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F_1.$$

379. Unter den Systemen von Kräften, welche in einer Ebene liegen, verdienen diejenigen eine besondere Betrachtung, welche aus drei Kräften bestehen.

Sind irgend drei Kräfte im Gleichgewicht, so liegen sie in einerlei Ebene. Dieser Satz beruht auf nachstehendem

Lehnsatz. Wenn drei Gerade A, B, C nicht sämmtlich in einerlei Ebene liegen, so gibt es unendlich viele Gerade, welche zwei von jenen schneiden ohne mit der dritten in eine Ebene zu fallen. — Liegen von jenen drei Geraden zwei in einer Ebene, so sollen A und B diese beiden sein; wo nicht, so können A und B zwei beliebige unter den dreien bedeuten (Fig. 49). Auf der Geraden A werde ein Punct a angenommen, welcher, falls A und B sich schneiden sollten, nicht dieser Durchschnittspunct sein darf. Die durch den Punct a und durch die Gerade B gelegte Ebene MN enthält die Gerade C nicht; und von allen durch a gehenden Geraden dieser Ebene fällt nur eine, C′, in einerlei Ebene

mit C; eine einzige, B′, ist parallel zu B; alle andern schneiden B ohne C zu treffen.

Es folgt hieraus, daß drei Kräfte, welche nicht in einerlei Ebene liegen, nicht im Gleichgewicht sein können; denn nimmt man eine Momentenaxe an, welche zwei von den Kräften schneidet, aber mit der dritten nicht in einer Ebene liegt, so kann das Moment dieser dritten Kraft nicht null werden (122), da keiner seiner beiden Factoren null ist. Folglich liegen drei im Gleichgewicht stehende Kräfte in einer Ebene.

Zusatz. Zwei Kräfte F′, F″, welche nicht in einer Ebene liegen, können keine Resultante R haben, weil die Gegenkraft — R der Resultante den beiden Kräften F′, F″ das Gleichgewicht halten würde.

380. Drei im Gleichgewicht befindliche Kräfte gehen durch einen und denselben Punct, oder sind sämmtlich parallel zu einander. Denn 1) wenn zwei von ihnen nach einem Puncte zusammenlaufen, so sind in Beziehung auf diesen Punct ihre Momente null, also auch das Moment der dritten, d. i. die dritte Kraft geht ebenfalls durch jenen Punct; 2) sind aber zwei der Kräfte parallel, so sind ihre Projectionen auf eine zu ihnen senkrechte Gerade null; daher muß Beides auch für die dritte Gerade der Fall sein.

381. Die Momentengleichung $\Sigma \mathfrak{M}_{o,z} F = 0$, angewandt auf drei Kräfte im Gleichgewicht, zeigt, daß die senkrechten Abstände eines Puncts der einen Kraft von den beiden andern Kräften im umgekehrten Verhältniß dieser beiden Kräfte stehen.

382. Die Untersuchungen über das Gleichgewicht dreier Kräfte lassen sich zurückführen auf die Betrachtung der Resultante von zweien dieser Kräfte, welche der dritten Kraft gleich und entgegengesetzt sein muß.

Aufgabe. Die Resultante zweier in einer Ebene liegenden Kräfte zu finden.

1) Schneiden sich die Richtungen der beiden Kräfte, so bestimmt man ihre Resultante mittels des Parallelogramms der Kräfte, entweder geometrisch, oder durch unmittelbare Berechnung (207), oder mit Benützung der für zwei Axen berechneten Projectionen (204).

2) Sind die Kräfte parallel, so nehmen wir zuerst den Fall vor, wo beide in gleichem Sinne wirken. Ihre Intensitäten seien durch F′, F″, und und der Abstand zwischen ihren Richtungen durch a bezeichnet. Die Resultante habe die Intensität R, und von der Kraft F′ den Abstand x′ (Fig. 50).

Nimmt man die Projectionsaxen in der Ebene der Kräfte so, daß die

eine Axe parallel mit den Kräften, die zweite senkrecht zu ihnen ist, und zieht man die Momentenaxe O senkrecht zur Ebene durch einen Punct O der Kraft F′, so geschieht den drei Bedingungen der Aequivalenz (378) Genüge wenn man R in gleichem Sinne parallel zu ihren Composanten annimmt, und anschreibt

$$R = F' + F'', \qquad Rx' = F''a;$$

woraus folgt daß $x' < a$ ist, und daß also die Resultante zwischen die beiden Kräfte fällt. — Wollte man die Momentenaxe durch einen Punct der Resultante legen, so hätte man die Momentengleichung $F'x = F''x''$, wobei x'' den Abstand der Resultante von der Kraft F″ bezeichnet; diese Relation ist aber schon in den zwei vorstehenden enthalten, und ergibt sich aus diesen wenn man R eliminirt und $a - x'$ durch x'' ersetzt. Also theilt die Resultante zweier in gleichem Sinne parallelen Kräfte den Abstand zwischen diesen im umgekehrten Verhältniß der Kräfte. Es ist klar, daß sie im nämlichen Verhältniß auch jede Gerade theilt, welche irgend einen Punct der einen Kraft mit einem beliebigen Puncte der andern verbindet.

Im zweiten Fall, wo die parallelen Kräfte F′, F″ entgegengesetzten Sinn haben, sei F′ die kleinere von beiden (Fig. 51). Man nimmt wieder die eine Projectionsaxe senkrecht, die andere parallel zu den Kräften, und läßt die (zur Ebene der Kräfte senkrechte) Momentenaxe durch einen Punct der F′ gehen. Der Abstand der beiden Kräfte sei a; die Distanz x′ der Resultante R von F′ gelte als positiv im Sinne von F′ nach F″ und darüber hinaus. Die Bedingungen der Aequivalenz (378) werden erfüllt, wenn man R parallel mit ihren Composanten und im Sinne der größern annimmt, und die Gleichungen

$$R = F'' - F', \qquad Rx' = F''a$$

ansetzt, aus denen hervorgeht, daß in diesem Falle $x' > a$ ist, daß folglich die Resultante außerhalb des zwischen den beiden Kräften enthaltenen Raumes liegt, und zwar auf der Seite der größern. Die Distanz x″ der Resultante von der größern Kraft F″ wäre durch die Momentengleichung $Rx'' = F'a$ gegeben, und das Verhältniß $x' : x''$ würde man durch eine dritte Momentengleichung $F'x' = F''x''$ erhalten (bei entsprechenden neuen Lagen der Momentenaxe). Die beiden letztern Gleichungen liegen jedoch schon in den zwei vorausgegangenen eingeschlossen, und lassen sich aus diesen (unter Berücksichtigung der Gleichung $x'' = x' - a$) herleiten, indem man das einemal F″, das andermal R eliminirt.

383. Anmerkungen. — 1) Ein Gegenpaar hat keine Resultante; denn eine dritte Kraft kann mit den beiden Kräften des Paares nicht im

Gleichgewicht sein, weil die Translationsresultante des Systems der drei Kräfte nicht null werden könnte. Daher sind die vorigen Formeln nicht für den Fall brauchbar wo $F'' = F'$ wäre; in der That würden sie in diesem Falle unendlich große Werthe für x' und x'' geben.

2) Die beiden oben unterschiedenen Fälle, in denen man die Resultante zweier paralleler Kräfte verlangen kann, lassen sich unter den zuerst gefundenen Formeln

$$R = F' + F'', \qquad Rx' = F''a$$

zusammenfassen, welche überhaupt für alle möglichen Annahmen hinsichtlich der Größe, des Sinnes und der gegenseitigen Lage der Kräfte passen, sobald man übereinkommt, Kräften von entgegengesetztem Sinn entgegengesetzte Vorzeichen zu geben, und wenn man zugleich den Sinn, in welchem die Distanzen a und x' von dem auf F' angenommenen Punct aus abzutragen sind, mit den Vorzeichen dieser Distanzen in Uebereinstimmung bringt.

384. Stehen beliebig viele Kräfte, welche in einer Ebene gegeben sind nicht im Gleichgewichte, so kommen sie entweder auf eine einzige Aequivalente oder auf ein Gegenpaar zurück; und man findet leicht im ersten Falle die Intensität der Resultante, im zweiten das Moment des Gegenpaars.

In der That kann man die sämmtlichen Kräfte (entweder nach dem Lehrsatze in Nr. 360, oder durch successive Zusammensetzung) auf zwei Aequivalente reduciren, und wenn diese kein Gegenpaar bilden, so gibt es für beide eine Resultante.

Bezeichnet man nun im letztern Falle die Resultante durch R, ihre Projectionen auf zwei rechtwinkelige Axen durch R_x und R_y, ihren Abstand vom Ursprung der Axen durch r, so hat man

$$R_x = \Sigma F_x, \qquad R_y = \Sigma F_y,$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \qquad \cos(R, x) = \frac{\Sigma F_x}{R}, \qquad \cos(R, y) = \frac{\Sigma F_y}{R},$$

$$\pm Rr = \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F, \qquad \text{also} \qquad r = \frac{\pm \Sigma \mathfrak{M}_{0z} F}{R}.$$

Man kennt hiernach 1) die absolute Intensität der Resultante, 2) die Richtung einer Geraden welche ihr in gleichem Sinne parallel ist, 3) den Abstand der Resultante von dem als Ursprung gewählten Punct, 4) das Zeichen oder den Sinn ihres Moments; und hieraus läßt sich die gesuchte Resultante vollens bestimmen.

Bilden aber jene beiden Aequivalenten ein Gegenpaar, so hat man $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, und die Größe $\Sigma \mathfrak{M}_{0z} F$ ist das Moment eines

äquivalenten Gegenpaars, welches eine beliebige Lage in der Ebene der Kräfte oder in irgend einer zu ihr parallelen Ebene haben kann (373).

385. Lehrsatz. Wenn die auf einen starren Körper wirkenden Kräfte sich auf zwei Systeme zurückbringen lassen welche in zwei parallelen Ebenen liegen, so muß zur Herstellung des Gleichgewichts die Translationsresultante jedes einzelnen Systems für sich null sein.

1) Wäre keine der Translationsresultanten null, so hätte jedes System eine (eigentliche) Resultante; alle Kräfte zusammengenommen würden sich also auf zwei reduciren welche sich nicht direct gegenüberstehen, und es könnte kein Gleichgewicht stattfinden (364).

2) Wäre eine der Translationsresultanten null, die andere aber nicht, so ließen sich die sämmtlichen Kräfte entweder auf eine einzige Kraft zurückführen, oder auf ein Gegenpaar und eine Kraft; es käme daher zu keinem Gleichgewicht (373).

Tritt also Gleichgewicht ein, so ist dieß ein Gleichgewicht zwischen zwei Gegenpaaren (373), wofern nicht die Kräfte jeder Ebene für sich im Gleichgewichte sind.

§. 10. Dritter besonderer Fall: Parallele Kräfte im Raum.

386. Wird einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte durch eine einzige Kraft das Gleichgewicht gehalten, so ist letztere mit ihnen parallel; denn ihre Projectionen auf jede Axe, welche einen rechten Winkel mit der Richtung der erstern Kräfte bildet, ist null (348).

387. Wenn beliebig viele Kräfte, welche einen starren Körper angreifen, parallel sind, so gilt dieß ebensoviel wie wenn drei von den Gleichgewichtsbedingungen erfüllt wären, und es bleiben dann nur noch drei solche Bedingungen übrig. Nimmt man nämlich die Axe Oz parallel zu den Kräften, und die Axen Ox, Oy senkrecht zu Oz, so sind die Projectionen auf Ox und Oy null, und die Momente in Beziehung auf Oz sind ebenfalls null. Die noch übrigen Bedingungen, deren Erfüllung für das Gleichgewicht nothwendig und hinreichend ist, bestehen darin, daß die algebraische Summe der Projectionen auf die Axe Oz, sowie die Summe der Momente in Beziehung auf die Axen Ox, Oy null werden.

Kommt man überein, 1) durch F irgend eine der Kräfte vorzustellen, und das Vorzeichen + oder — beizusetzen jenachdem die Kraft im Sinne Oz

oder im entgegengesetzten wirkt; 2) die zu Oz senkrechten Axen Ox, Oy auch unter sich senkrecht anzunehmen, und mit x, y die positiven oder negativen Coordinaten eines beliebigen Punctes der Geraden zu bezeichnen, in welcher die Richtung der Kraft F fällt: so sind die noch zu erfüllenden drei Bedingungen ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\Sigma F = 0, \qquad \Sigma Fx = 0, \qquad \Sigma Fy = 0, \qquad [111]$$

von deren Richtigkeit (für alle möglichen Annahmen über den Sinn und die Lage der Kraft F) man sich leicht überzeugt.

388. Leisten die parallelen Kräfte den drei vorstehenden Bedingungen [111] nicht Genüge, so reduciren sie sich auf ein Gegenpaar oder auf eine einzige Resultante, jenachdem ΣF null ist oder nicht. Zu diesem Schlusse gelangt man offenbar durch successive Zusammensetzungen nach der in Nr. 382 angegebenen Regel.

Erster Fall. $\Sigma F = 0$. Denkt man sich das System auf zwei Aequivalente zurückgebracht, von denen die eine S in der Axe Oz liegt, die andere T parallel mit Oz durch einen Punct geht dessen Coordinaten x_1, y_1 sind, so hat man (365)

$$S + T = 0, \qquad Tx_1 = \Sigma Fx, \qquad Ty_1 = \Sigma Fy,$$

also drei Gleichungen zwischen vier Unbekannten. Die Aufgabe ist unbestimmt, und muß es sein, da ein Gegenpaar durch ein anderes ersetzt werden kann, selbst mit Beibehaltung der Lage für die eine Kraft. Die Ebene des Paares wird bestimmt durch das Verhältniß $\frac{y_1}{x_1} = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma Fx}$, und sein Moment durch

$$T\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(\Sigma Fx)^2 + (\Sigma Fy)^2}.$$

Endlich kann man den Sinn und das Zeichen der Kraft T beliebig wählen muß aber dann der Kraft S den entgegengesetzten Sinn beilegen und den Coordinaten x_1, y_1 diejenigen Vorzeichen geben, welche die Gleichungen $Tx_1 = \Sigma Fx$, $Ty_1 = \Sigma Fy$ verlangen.

Zweiter Fall. Ist ΣF von null verschieden, so haben die beiden parallelen Aequivalenten eine Resultante. Bezeichnet man dieselbe durch R, und die Coordinaten eines beliebigen Punctes ihrer Richtung durch x_1, y_1, so hat man (365) in den drei Gleichungen

$$R = \Sigma F, \qquad Rx_1 = \Sigma Fx, \qquad Ry_1 = \Sigma Fy$$

die Lösung einer bestimmten Aufgabe, welche als besondern Fall die Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte einschließt.

389. Sind beliebig viele Puncte gegeben, durch welche parallele Kräfte von einerlei Sinn und von bekannten Intensitäten gehen sollen, so kann man, ohne die Richtung dieser Kräfte zu kennen, einen Punct finden, durch welchen nothwendig ihre Resultante gehen muß.

Für zwei Kräfte F', F'' steht dieß bereits (382) fest; denn sind M', M'' zwei Puncte, von denen man weiß daß sie auf den (im Uebrigen unbekannten) Richtungen der parallelen Kräfte liegen, so geht die Resultante R'' beider Kräfte durch einen Punct N'', der die Gerade $M'M''$ im umgekehrten Verhältniß der Kräfte theilt. Ebenso geht die Resultante R''' für R'' und eine dritte parallele Kraft F''', deren Richtung einen gegebenen Punct M''' enthalten soll, durch einen Punct N''', welcher die Gerade $N''M'''$ im umgekehrten Verhältniß der Kräfte $F' + F''$ und F''' theilt.

Fährt man so fort, so gelangt man zu einem Puncte N, durch den die Resultante einer beliebigen Anzahl paralleler Kräfte gehen muß, welche Richtung diese auch haben mögen.

Dieser Punct heißt der Mittelpunct der parallelen Kräfte.

Bedeutet F eine beliebige Kraft des Systems, x den Abstand ihres Angriffspuncts von irgend einer Ebene, X den Abstand des Mittelpuncts der parallelen Kräfte von der nämlichen Ebene, so kann man, ohne daß die Lage dieses Puncts sich ändert, die Kräfte parallel zur gewählten Ebene annehmen, und hat dann also, wie in der vorigen Nummer

$$R' = \Sigma F, \qquad RX = \Sigma Fx, \qquad \text{daher} \qquad X = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}.$$

Verfährt man ebenso in Beziehung auf zwei andere Ebenen, so erhält man

$$Y = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \qquad Z = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}.$$

Somit hat man die drei Coordinaten für den Mittelpunct der parallelen Kräfte, in Function der Coordinaten ihrer Angriffspuncte.

Es ist leicht einzusehen, daß die nämliche Eigenschaft eines Mittelpuncts besteht, wenn die parallelen Kräfte sich in zwei Gruppen von entgegengesetztem Sinn theilen, und daß für diesen Fall die nämlichen Formeln gelten.

390. Sind die parallelen Kräfte die Gewichte der materiellen Puncte aus denen ein starrer Körper besteht, so ist der Mittelpunct dieser Kräfte kein anderer als der Schwerpunct des Körpers; denn man kann in den obigen Formeln den Kräften F oder den Gewichten der materiellen Puncte die Massen dieser Puncte substituiren, welche den Gewichten proportional sind; und die Formeln gehen dann über in die der Nr. 95.

Hieraus ergibt sich ein Mittel, den Schwerpunct eines starren Körpers durch Versuche zu bestimmen. Man hängt entweder den Körper zweimal (mit verschiedenen Anknüpfungspuncten) auf, und erhält so zwei Gerade welche sich im gesuchten Schwerpuncte schneiden müssen; oder man setzt den Körper auf einer horizontalen Schneide in's Gleichgewicht, und wiederholt den Versuch für verschiedene Stellungen, wodurch sich mehrere Ebenen ergeben welche den Schwerpunct enthalten.

§. 11. Wechselseitige Anziehung zweier Kugeln welche aus homogenen concentrischen Schichten bestehen.

391. Der nachstehende Satz findet seine Anwendung in der Physik, und folgt aus der Grundeigenschaft der Resultante mehrerer Kräfte mit gemeinschaftlichem Angriffspuncte.

Lehrsatz. Wenn zwei materielle Kugeln aus homogenen Schalen gebildet sind, deren sämmtliche Puncte sich im geraden Verhältniß ihrer Massen und in umgekehrtem Verhältniß mit dem Quadrate ihrer Entfernung anziehen, so ist die Resultante der Kräfte, welche jede Kugel auf die andere ausübt, die nämliche wie wenn die gesammte Materie jeder Kugel in ihrem Schwerpuncte vereinigt wäre.

Um den Beweis herzustellen, betrachten wir zuerst die Anziehung einer homogenen Kugelschale, deren Mittelpunct O ist (Fig. 52), gegen einen materiellen Punct A, welcher nicht auf dieser Schale liegt.

Es sei i die unendlich kleine Dicke der Schale; r ihr Halbmesser; ihr Volum also $$4\pi r^2 i.$$

Ferner sei f die Anziehung welche zwei mit der Masseneinheit begabte materielle Puncte im Abstande von einem Meter auf einander ausüben; m die Masse des materiellen Puncts A; μ die Masse für die Volum-Einheit der Schale, so daß deren ganze Masse (welche wir $\mathfrak{M}$ nennen wollen) $= 4\pi r^2 i\mu$ ist.

Bezeichnet α die Oberfläche eines unendlich kleinen Stücks der Schale, z seine Distanz vom Puncte A, so ist sein Volum αi, seine Masse $\mu\alpha i$, und seine Anziehungskraft gegen A (dem im Lehrsatze angegebenen Gesetze gemäß) $= \dfrac{fm\mu\alpha i}{z^2}$.

Die Resultante aus allen ähnlichen Kräften für eine beliebige Zone zwischen zwei auf OA senkrechten Ebenen MM_1, $M'M'_1$ hat offenbar die Richtung AO, und ist also (204) gleich der Summe aus den Projectionen der elementaren Kräfte auf diese Axe AO.

Die Projection von $\frac{fm\mu\alpha i}{z^2}$ auf AO ist $\frac{fm\mu\alpha i}{z^2} \cdot \frac{x}{z}$, wenn x die Länge AP (die Projection der Distanz AM) bezeichnet. Die Summe aller ähnlichen Werthe, entsprechend den sämmtlichen Elementen α welche auf einer unendlich schmalen Zone liegen, gibt die von dieser Zone ausgehende Anziehung. Denkt man sich daher den Bogen MM′ (und also auch die von ihm erzeugte Zone) unendlich klein, und setzt PP′ = dx, so erhält man jene Summe (da alle Elemente α der Zone dasselbe x und dasselbe z haben), wenn man in dem für die Summanden erhaltenen Ausdrucke statt α die Oberfläche $2\pi r dx$ der Zone setzt. Die genannte Anziehung ist daher

$$2fm\pi ri\mu \cdot \frac{x}{z^3}dx \qquad \text{oder} \qquad f\frac{m\mathfrak{M}}{2r} \cdot \frac{xdx}{z^3}, \qquad [112]$$

indem $\mathfrak{M}$ an die Stelle von $4\pi r^2 i\mu$ tritt.

Diese Größe drückt zugleich die Resultante für die Wirkungen des Puncts A auf die materielle Zone $MM'M_1M'_1$ aus, weil alle diese Wirkungen beziehungsweise den Composanten gleich und entgegengesetzt sind, aus denen sich die Wirkung der Zone auf den Punct A zusammensetzt (276).

Die Integration des obigen Ausdrucks liefert die gesammte Kraft welche die Kugelschale auf den materiellen Punct A übt, und hinwieder die Resultante der Wirkungen des Puncts A auf die Kugelschale.

Da die eine der Veränderlichen x, z eine Function der andern ist, so hat man eine derselben zu eliminiren. Aus $r^2 = a^2 + z^2 - 2ax$ (wobei a = OA) folgt

$$x = \frac{z^2 + a^2 - r^2}{2a} \qquad \text{und} \qquad dx = \frac{zdz}{a}.$$

Demnach wird der obige Ausdruck [112] für die Anziehung der Zone:

$$\frac{fm\mathfrak{M}}{4ra^2}\left\{dz + (a^2 - r^2)\frac{dz}{z^2}\right\},$$

und sein allgemeines Integral ist

$$\frac{fm\mathfrak{M}}{4ra^2}\left(z - \frac{a^2 - r^2}{z}\right) + C. \qquad [113]$$

Liegt der Punct A außerhalb der Kugelschale, wie in Fig. 52 angenommen ist, so hat man das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $z_0 = a - r$ und $Z = a + r$ zu nehmen. Aus dem obigen allgemeinen

Integral von der Form $\varphi(z) + C$ erhält man also das bestimmte Integral $\varphi(Z) - \varphi(z_0)$ oder

$$\frac{fm\mathfrak{M}}{4ra^2}\left\{a + r - \frac{a^2 - r^2}{a + r} - (a - r) + \frac{a^2 - r^2}{a - r}\right\}$$

als Ausdruck der gesuchten Kraft. Dieser Werth reducirt sich aber auf $\frac{fm\mathfrak{M}}{a^2}$, d. h. er ist der nämliche wie wenn alle Materie der Kugelschale in ihrem Mittelpuncte O vereinigt wäre.

Der aufgestellte Lehrsatz ist somit für den Fall bewiesen, daß die eine Kugel eine äußerst dünne Hohlkugel ist, und die andere sich auf einen außerhalb der ersten gelegenen materiellen Punct reducirt.

392. **Zusatz.** Ein aus homogenen concentrischen Kugelschalen zusammengesetzter Körper, dessen sämmtliche Puncte einen außerhalb liegenden Punct in umgekehrtem Verhältniß mit dem Quadrat der Entfernung anziehen, übt auf diesen Punct dieselbe Wirkung wie wenn die ganze Materie im Mittelpuncte vereinigt wäre; und nach der weiter oben gemachten Bemerkung gilt das Nämliche auch für die Resultante der Kräfte welche der äußere Punct auf den sphärischen Körper übt.

393. Liegt der Punct A innerhalb der Kugelschale, so erleidet die ganze obige Rechnung keine Aenderung, die Grenzen des Integrals [113] ausgenommen, welche jetzt $r - a$ und $r + a$ werden. Dieses Integral gibt dann

$$\frac{fmM}{4ra^2}\left\{r + a + \frac{r^2 - a^2}{r + a} - (r - a) - \frac{r^2 - a^2}{r - a}\right\}$$

und reducirt sich auf Null.

Bei dem nämlichen Anziehungsgesetze beschränkt sich also die Wirkung eines aus homogenen Kugelschalen gebildeten Körpers gegen jeden Punct in seinem Innern auf die Wirkung derjenigen Materie, welche von der durch den Punct gehenden Kugelfläche umschlossen wird; denn der Punct erscheint als ein äußerer in Beziehung auf diese Materie, während die Wirkung der ihn einschließenden Schichten null ist.

394. Dieser letzte Satz läßt sich auch durch geometrische Betrachtungen beweisen.

Die Ebene der Fig. 53 stelle eine beliebige durch OA gelegte Ebene vor; MN sei ein unendlich kleiner Bogen in dieser Ebene; MP eine Senkrechte auf OA. Die Oberfläche der Zone, welche von MN bei einer Um-

drehung um OA beschrieben wird, ist MN . 2πMP; durchläuft aber der Bogen statt einer vollen Umdrehung nur einen äußerst kleinen Bruchtheil derselben, der durch $\frac{1}{n}$ ausgedrückt sein mag, so ist die beschriebene Fläche $\frac{2\pi}{n}$. MN . MP; und da diese in jedem Sinne unendlich klein ist, kann man AM für ihren Abstand vom Puncte A nehmen. Dem zugehörigen Elemente der Kugelschale, deren äußerst geringe Dicke i ist, entspricht also eine Anziehungskraft von der Intensität

$$fm\mu i \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{MN \cdot MP}{AM^2}.$$

Die Geraden MA, NA verlängere man bis M′, N′. Der Bogen M′N′ wird während der obenerwähnten kleinen Drehbewegung ebenfalls ein kleines Zonenstückchen beschreiben, dessen Anziehung auf den Punct A die Intensität

$$fm\mu i \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{M'N' \cdot M'P'}{AM'^2}$$

hat. — Nun kann man sich leicht überzeugen, daß dieser zweite Werth dem erstern gleich ist. Die ähnlichen Dreiecke AMN, AM′N′ geben $\frac{MN}{AM} = \frac{M'N'}{AN'}$, oder, wenn man AN′ durch AM′ ersetzt (indem das Verhältniß beider beliebig nahe an 1 : 1 gebracht werden kann): $\frac{MN}{AM} = \frac{M'N'}{AM'}$; ferner hat man offenbar $\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'}$; und durch Multiplication kommt

$$\frac{MN \cdot MP}{AM^2} = \frac{M'N' \cdot M'P'}{AM'^2}.$$

Folglich sind die beiden betrachteten Anziehungen einander gleich und entgegengesetzt und heben sich auf; woraus man weiter schließt, daß überhaupt die Gesammtwirkung der Kugelschale auf den Punct A sich in sich selbst aufheben muß.

395. Anmerkung. Wäre die Erde genau kugelförmig und homogen, so würde ihre Anziehung auf einen Punct im Innern dem Abstande dieses Puncts vom Mittelpunct direct proportional sein, während ihre Anziehung auf einen Punct über der Oberfläche dem Quadrat der Entfernung vom Mittelpunct umgekehrt proportional wäre. Für innere Puncte müßte man nämlich in der Formel $\frac{f m \mathfrak{M}}{a^2}$ die Masse $\mathfrak{M}$ veränderlich nehmen, und zwar proportional dem Cubus von a; für Puncte außerhalb des Erdkörpers aber bliebe $\mathfrak{M}$ constant.

396. Wir betrachten nun zwei Kugeln, welche außer einander liegen und aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzt sind; M und M' seien ihre Gesammtmassen, O und O' ihre Mittelpuncte, a die Entfernung zwischen diesen.

Die Wirkung der ersten Kugel auf jeden materiellen Punct der zweiten ist die nämliche wie wenn die Masse M der ersten in ihrem Mittelpuncte O vereinigt wäre; ihre Wirkung auf die ganze zweite Kugel ist daher gleich derjenigen, welche auf diese zweite Kugel von einem in O gelegenen und mit der Masse M begabten Puncte geübt würde. In diesem Falle ist aber die Wirkungsresultante durch $\frac{fMM'}{a^2}$ ausgedrückt, gleich als wäre die Masse M' der zweiten Kugel ebenfalls in ihrem Mittelpuncte O' vereinigt.

Dadurch ist der zu Anfang der Nr. 391 ausgesprochene Lehrsatz bewiesen.

Drittes Kapitel.

Anwendung der Statik auf dynamische Aufgaben.

---

§. 1. Fingirtes Gleichgewicht zwischen den wirklichen Kräften und den Trägheitskräften während der Bewegung eines Körpers von beliebiger Art.

397. Ist irgend ein materielles System in Bewegung begriffen, so bewegt sich jeder Punct unter der Einwirkung von Kräften, welche theils äußere F, theils wechselseitige innere f sind. Diese wirklich vorhandenen Kräfte haben in jedem Augenblicke für jeden Punct eine Resultante, welche wir die Gesammtkraft nennen und durch φ bezeichnen wollen.

Die Beziehungen dieser Resultante zu der Bewegung des betreffenden Puncts sind im zweiten Abschnitt abgehandelt worden.

Bezeichnet m die Masse des betrachteten Puncts M, v seine Geschwindigkeit in einem beliebigen Augenblick, mit welchem die Zeit t endigt, ϱ den Krümmungshalbmesser des Bogens den der Punct in diesem Augenblicke zu beschreiben im Begriffe steht,*) so ist aus früher bewiesenen Lehrsätzen bekannt,

1) daß die Kraft φ in eine Tangentialkraft ψ und eine Centripetalkraft χ zerlegt werden kann, welche die Gleichungen

$$\psi = m\frac{dv}{dt}, \qquad \chi = \frac{mv^2}{\varrho}$$

befriedigen;

2) daß, wenn man die Bewegung des Puncts M auf eine beliebige Axe Ox projicirt, die Gleichung

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\varphi_x}{m}$$

gilt, in welcher die früher angenommenen Bezeichnungen wieder benützt sind.

---

*) Dieser Halbmesser ϱ ist bei einem starren Systeme nicht mit dem Abstande des Puncts M von der augenblicklichen Rotationsaxe zu verwechseln (57, 54, 51).

Man weiß, daß v_x gleichbedeutend mit $\frac{dx}{dt}$ ist, wobei x die veränderliche Abscisse des Puncts M vorstellt. Der Ausdruck $\frac{dv_x}{dt}$ bedeutet daher $\frac{d\frac{dx}{dt}}{dt}$, wofür man gewöhnlich $\frac{d^2x}{dt^2}$ schreibt, so daß die vorige Gleichung in die Form kommt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x.$$

398. Man denke sich nun neben den äußern Kräften F noch an jedem Puncte M zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte angebracht, nämlich die vorhin erklärte Kraft φ und die Gegenkraft $-\varphi$; dadurch wird sich weder in der Bewegung noch in dem Molecularzustande des materiellen Systems irgend etwas ändern. Da aber jeder Punct M sich so bewegt wie wenn er blos von der Kraft φ angegriffen wäre, so müssen bei obiger Annahme die Kräfte F, f, $-\varphi$ an diesem Puncte sich im Gleichgewicht halten; und wenn man diese Betrachtung auf alle Puncte des Systems ausdehnt, so muß also die Gesammtheit der äußern Kräfte F, der Molecularkräfte f und der hinzugedachten Kräfte $-\varphi$ von der Art sein, daß, wenn das materielle System statt in Bewegung in Ruhe wäre, die Ruhe unter der Wirkung jener drei Gattungen von Kräften fortbestände.

Während der Bewegung eines materiellen Systems von beliebiger physischer Constitution genügen folglich die Kräfte $-\varphi$ (deren jede der Kraft φ gleich und entgegengesetzt ist, welche für sich allein die Abänderungen in der Bewegung des zum System gehörigen Punctes M, nämlich Beschleunigung und Krümmung, hervorbringen würde) und die äußern Kräfte F in jedem Augenblicke allen Bedingungen für das Gleichgewicht des Systems in seinem eben stattfindenden Molecularzustande; die Molecularkräfte (die innern Spannungen oder Pressungen) sind mithin dieselben wie wenn das System bei unveränderter Form unter der Wirkung der Kräfte F und $-\varphi$ in Ruhe wäre; und wenn das System seinen eben stattfindenden Bewegungszustand durch zuvor thätig gewesene Kräfte erreicht hat, so setzt es seine Bewegung so fort wie wenn jeder seiner Puncte von der ihm entsprechenden Gesammtkraft φ getrieben würde, die Kräfte F und die Molecularwirkungen aber aufgehört hätten.

399. Die Annahme eines während der Bewegung stattfindenden Gleichgewichts zwischen den wirklichen (äußern und innern) Kräften F, f und den Kräften $-\varphi$, welche man in Gedanken an den materiellen Puncten des Systems anbringt, bildet die Grundlage von D'Alembert's allgemeinem Princip der Dynamik. Das Wesen derselben besteht darin,

daß es jede Aufgabe über Bewegung auf eine Aufgabe über das Gleichgewicht zurückführt. Man würde aber die Vortheile der aus dieser Betrachtungsweise fließenden Methode überschätzen, wenn man glauben wollte, man könne durch sie alle dynamischen Aufgaben in Gleichung setzen, so daß für die Lösung dieser Aufgaben keine weitern Schwierigkeiten blieben als rein analytische; denn die vollständigen Bedingungen für das Gleichgewicht der Körper, wie sie in der Natur vorkommen, hängen von den Gesetzen ab welche die Intensitäten der Molecularwirkungen bestimmen, und diese sehr verwickelten Gesetze müssen erst durch Hypotyesen vereinfacht werden um in die Rechnung eingehen zu können.

400. Die Kräfte $-\varphi$, welche wir als eine bloße Erfindung des Verstandes betrachtet haben, werden von mehreren Autoren als wirkliche Kräfte genommen und Trägheitskräfte genannt. Um zu verstehen, unter welchem Gesichtspuncte diese Meinung sich aufrecht erhalten läßt, hat man zu beachten, daß ein materieller Punct M die Kräfte, denen er unterworfen ist und welche die Resultante φ haben, von anderen, mehr oder weniger entfernten Puncten empfängt, und daß er diese Kräfte nicht hinnehmen kann ohne mit gleichen und entgegengesetzten Kräften auf jene Puncte zurückzuwirken. Diese Rückwirkungen, welche wir z. B. verspüren wenn wir Hand an einen Körper legen, beweisen uns die Trägheit der Materie. Alle Rückwirkungen des betrachteten Puncts M erfolgen in Richtungen welche durch diesen Punct gehen; und obgleich sie verschiedene Angriffspuncte haben, kann man doch theoretisch sagen, sie haben eine Resultante, welche offenbar $-\varphi$ ist. Diese Resultante meint man, wenn man von der Kraft der Trägheit spricht; sie kann immer in zwei unter sich senkrechte Kräfte zerlegt werden, nämlich in die Tangentialkraft $-\psi = -m\frac{dv}{dt}$, welche in einem der Beschleunigung entgegengesetzten Sinne wirkt, und die Centrifugalkraft $\frac{mv^2}{\varrho}$ deren Sinn der Centripetalkraft entgegengesetzt ist.

401. Nach diesen Erläuterungen läßt sich das D'Alembert'sche Princip folgendermaßen aussprechen:

Bei der Bewegung irgend eines materiellen Systems besteht fortwährend Gleichgewicht zwischen den von außen auf das System wirkenden Kräften, den Molecularwirkungen, und den Trägheitskräften welche der veränderlichen krummlinigen Bewegung der verschiedenen Elemente des Systems entsprechen.

Anwendungen dieses Princips (oder vielmehr dieser Bemerkung) werden im siebenten Abschnitt folgen.

§. 2. Eigenschaften der äquivalenten Kräfte bei der Bewegung eines starren Körpers.

402. Lehrsatz. In der Bewegung eines starren Körpers ändert sich nichts, wenn man die ihn von außen angreifenden Kräfte F durch äquivalente Kräfte F_1 ersetzt.

Wir betrachten das System in einem gewissen Augenblick, wo es sich in einem gegebenen Zustande befindet, und von welchem aus es seine Bewegung in irgend einer bestimmten Weise fortsetzen muß. Jeder Punct wird sich dabei so bewegen, als würde er von einer gewissen Kraft φ allein angegriffen. Denkt man sich nun an allen Puncten des Systems neben den ursprünglichen Kräften F gleichzeitig die Kräfte φ sammt ihren Gegenkräften $-\varphi$ angebracht, so wird dadurch nichts geändert; doch kann man jetzt annehmen, daß die Kräfte F und $-\varphi$ im Gleichgewichte sind, oder wie man sagt, sich aufheben, während die Bewegung ihren Character durch die Kräfte φ und die vorhandenen Anfangsgeschwindigkeiten erhält. Vertauscht man unter diesen Umständen die Kräfte F mit ihren Aequivalenten F_1 und setzt das System als vollkommen starr voraus, so wird das Gleichgewicht mit den Kräften $-\varphi$ fortbestehen, in Folge der Modificationen denen sich die Molecularwirkungen unterziehen; daher werden alle Puncte fortfahren den Kräften φ Folge zu leisten, wie wenn diese Puncte vereinzelt und frei wären; und folglich wird in der Bewegung keine Aenderung vorgehen.

403. Zusatz. Man ändert nichts an der Bewegung eines starren Körpers, wenn man Kräfte zufügt oder wegnimmt welche im Gleichgewicht stehen.

404. Anmerkungen. — 1) Man gibt zuweilen als Definition an, zwei Gruppen von Kräften F, F_1 seien äquivalent, wenn die eine Gruppe einen starren Körper in die nämliche Bewegung versetzt wie die andere. Diese Definition erheischt aber einen unerwähnt und unbewiesen gelassenen Vordersatz (oder sie enthält eine petitio principii), indem sie voraussetzt, daß zwei Systeme von Kräften, welche man einander substituiren kann ohne dadurch einen vorhandenen Gleichgewichtszustand zu ändern, diese Eigenschaft auch noch für den Zustand der Bewegung besitzen.

405. — 2) Es ist wohl zu merken, daß die obige Eigenschaft sich auf die Voraussetzung der Starrheit des materiellen Systems gründet, und daß die Vertauschung gewisser Kräfte F mit äquivalenten F_1 die Molecularwirkungen verändert. Führt man z. B. an einem prismatischen Stabe zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte ein, welche auf die beiden Grundflächen

wirken, so wird der Zustand der Spannung oder der Compression in diesem Körper nicht der vorige bleiben.

406. Aus dem Lehrsatze in Nr. 402 und dem in Nr. 376 folgt, daß ein starrer Körper unter der Wirkung beliebiger Kräfte F sich in jedem Augenblicke so bewegt, wie wenn auf ihn eine Kraft wirkte gleich der nach einem willkührlich gewählten Punct verlegten Translationsresultante der Kräfte F, und ein Gegenpaar, dessen Moment und Richtung von den Kräften F und der Wahl des Angriffspuncts für ihre Translationsresultante abhängen.

§ 3. Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers.

407. Bei jeder beliebigen Bewegung eines Körpers unter der Wirkung äußerer, constanter oder veränderlicher Kräfte F hängen die Aenderungen in der Bewegung des Schwerpuncts blos von der Translationsresultante und der Gesammtmasse des Körpers ab (283, 284). Gesetzt nun, man habe nach diesem Princip für jeden Augenblick die Lage des Schwerpuncts eines Körpers berechnet; um dann die Bewegung des Körpers in allen seinen Theilen zu kennen, bleibt nur noch übrig, seine relative Bewegung in Beziehung auf bewegliche Axen zu bestimmen, welche parallel mit sich selbst fortrücken und stets durch den Schwerpunct gehen. Bei einem starren Körper ist diese relative Bewegung eine Rotation um den Schwerpunct, da dieser wie ein fester Punct betrachtet wird und von den verschiedenen Puncten des Körpers constante Entfernungen behält; auch kann möglicherweise jeder Punct blos einen Kreis beschreiben.

408. Nach Nr. 296 läßt sich die eben erwähnte relative Bewegung des Körpers wie eine absolute behandeln, wenn man an jedem seiner Puncte außer den wirklich vorhandenen äußern Kräften F eine Kraft $-F_e$, gleich und entgegengesetzt der Transportkraft, anbringt. Nun sind (da die Axen eine Translationsbewegung haben) alle auf diese Art eingeführten Kräfte parallel und den Massen der von ihnen angegriffenen Puncte proportional; deshalb, und weil der Körper starr ist, haben diese sämmtlichen Kräfte eine Resultante, welche durch den Schwerpunct geht und ihnen substituirt werden kann (402). Für die relative Bewegung, insofern sie als absolute betrachtet wird, ist der Schwerpunct fest; daher hat jene Resultante keinen Einfluß auf die Rotation, zu deren Erzeugung also nur die wirklichen Kräfte F übrig bleiben. Dieß spricht sich in folgendem Satze aus.

Lehrsatz. Die relative Rotationsbewegung eines starren Körpers um seinen Schwerpunct, auf Axen bezogen welche durch den Schwerpunct gehen und mit ihren ursprünglichen Richtungen fortwährend parallel bleiben, ist dieselbe wie wenn der Schwerpunct fest wäre und die nicht durch den Schwerpunct gehenden äußern Kräfte dabei die nämlichen blieben.

Diesen Satz und den in Nr. 283 drückt man häufig, um beide kurz zusammenzufassen, so aus: Der Schwerpunct eines starren Körpers bewegt sich so, wie wenn alle Kräfte in ihn verlegt wären; und der Körper selbst dreht sich um den Schwerpunct wie wenn dieser fest wäre.

Vierter Abschnitt.

Hydrostatik, oder Bedingungen des Gleichgewichts flüssiger Körper.

---

§. 1. Charakteristische Eigenschaften der Flüssigkeiten.

409. Eine Flüssigkeit ist eine dem Anscheine nach stetige Ansammlung materieller Puncte, welche sich schon durch höchst schwache Kräfte trennen oder über einander hin verschieben lassen. Man theilt die Flüssigkeiten in tropfbare und in luftförmige oder Gase. Die tropfbaren lassen sich nur durch einen äußerst großen Druck comprimiren, und werden aus diesem Grunde zuweilen incompressible Flüssigkeiten genannt. Die Gase oder luftförmigen Flüssigkeiten sind zusammendrückbar, und innerhalb gewisser Grenzen mit vollkommener Elasticität begabt, weshalb sie auch elastische Flüssigkeiten heißen.

410. Der wesentliche Charakter des vollkommenen Flüssigkeitszustandes, bei tropfbaren Körpern wie bei Gasen, besteht in der Abwesenheit jeder Reibung zwischen den Theilchen des flüssigen Körpers selbst, oder zwischen diesen und den umgebenden Körpern. Diese Eigenschaft findet sich in der Natur nicht in absoluter Weise, darf aber als eine mit der Erfahrung übereinstimmende Annäherung angenommen werden, namentlich wenn es sich von ruhenden Flüssigkeiten handelt, oder auch von solchen deren relative Bewegungen gegen angrenzende Körper nur langsam vor sich gehen.

411. Aus diesem Grundprincip der Hydrostatik ergibt sich als nothwendige Folge eine andere Eigenschaft, welche man in den Lehrbüchern über diesen Gegenstand gewöhnlich als ein Versuchsresultat betrachtet; nämlich:

Für jeden bestimmten Punct einer Flüssigkeit ist der auf die Flächeneinheit bezogene Druck nach allen Richtungen hin gleichgroß.

Damit die Bedeutung dieses Satzes vollkommen deutlich werde, muß zuerst erklärt sein, was man unter jenem Druck an einem Puncte eines flüssigen Körpers versteht. Man denke sich einen solchen Körper von allen Seiten durch eine polyedrische Umkleidung eingeschlossen, und betrachte ein ebenes

Stück dieser Umkleidung. Dasselbe empfängt offenbar von Seite der Flüssigkeit eine unendliche Menge kleiner, von innen nach außen wirkender Kräfte, welche vereint den Gesammtdruck auf das betrachtete Flächenstück ausmachen, und deren Resultante bei einer vollkommenen Flüssigkeit stets senkrecht zur gedrückten Fläche ist, während die Wirkungen einer mehr oder minder zähen Flüssigkeit auf die Umkleidung auch schief gegen diese gerichtet sein können, wie es bei der Reibung zwischen festen Körpern der Fall ist.

Die gedrückte Fläche theile man in immer kleinere und kleinere Theile. Findet man dabei, daß der Gesammtdruck auf jeden Theil im nämlichen Verhältniß abnimmt wie dieser Flächentheil selbst, so kann man sagen, der Druck sei gleichförmig; und wenn man einen solchen, nach Kilogrammen berechneten Gesammtdruck mit der Zahl dividirt, welche das Verhältniß des gedrückten Flächentheils zum Quadratmeter angibt, erhält man den Druck für den Quadratmeter, oder den auf einen Quadratmeter bezogenen Druck.

Sind aber die Druckkräfte auf die Unterabtheilungen des gedrückten Flächenraums den entsprechenden Flächentheilen nicht proportional, so gibt der Quotient aus dem Gesammtdruck auf das ganze Flächenstück, dividirt durch diese Fläche, den mittleren Druck für den Quadratmeter; und die Grenze, welcher dieser Quotient sich nähert, wenn man den um einen bestimmten Punct herumliegenden Flächenraum immer kleiner und kleiner nimmt, ist der auf den Quadratmeter bezogene Druck in diesem Puncte.

Dieser Begriff läßt sich auch auf einen Punct im Innern der Flüssigkeit übertragen. Denkt man sich durch einen solchen Punct ein Stück von einer Ebene gelegt, so äußern die beiderseits anliegenden Theile der Flüssigkeit wechselseitige Wirkungen, welche man sich als gleiche Drücke auf die beiden Seiten des Ebenenstücks vorstellen kann. Der eine dieser Drücke, dividirt durch den Flächenraum auf welchen er wirkt, ist der mittlere Druck; und der Grenzwerth des mittleren Drucks bei fortgesetzter Verkleinerung des Ebenenstücks (welches aber immer noch den betrachteten Punct enthalten muß und seine Stellung nicht ändert) ist der auf die Flächeneinheit bezogene Druck, der in diesem Puncte senkrecht zur angenommenen Stellung des Ebenenstücks stattfindet.

Der Kürze wegen (und zu deutlicherer Unterscheidung) soll von jetzt an für den auf den Quadratmeter berechneten Druck an einem bestimmten Puncte ausschließlich der Name Pressung gebraucht werden, während Druck schlechthin irgend eine Summe von Elementardrücken bezeichnet.

Nach diesen Erläuterungen besteht nun der Inhalt des oben ausgesprochenen Satzes (daß nämlich für einen und denselben Punct die Pressung in allen Richtungen gleich sei) darin, daß an einem willkürlich angenommenen Puncte im Innern der Flüssigkeit der auf die Flächeneinheit berechnete Druck

immer der nämliche ist, in welchem Sinne man ihn auch betrachte, d. h. welche Stellung man auch dem erwähnten kleinen Ebenenstückchen geben möge, wenn dasselbe nur immer durch den nämlichen Punct geht.

Um den Beweis dafür zu liefern, lege man durch diesen Punct M (Fig. 54) zwei beliebige Ebenen MM'N, MM'L, construire in diesen Ebenen über einem beliebigen Stücke MM' ihrer Durchschnittslinie die beiden Quadrate MN', M'L, vollende das auf solche Art bestimmte Prisma MLNM', und ziehe nun die von dem Prisma umschlossene Flüssigkeit in Betracht. Die äußern Kräfte, unter deren Wirkung diese Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, sind 1) die normalen Drücke auf die fünf Außenflächen des Prisma's, 2) die der Schwere ähnlichen Wirkungen*) welche alle Theilchen der betrachteten Flüssigkeitsmenge angreifen. Durch fortgesetzte Verkleinerung der Quadratseite MM' kann aber die Summe der letztern Kräfte im Vergleich zu den auf die Seitenflächen wirkenden Drücken so klein werden als man nur will; denn jene Summe bleibt proportional dem körperlichen Inhalte des Prisma's, mithin dem Cubus von MM', während die genannten Drücke nur im Verhältniß des Quadrats von MM' abnehmen. Macht man z. B. die Linien MM', MN rc., nachdem sie schon sehr klein geworden sind, noch 10mal kleiner, so wird die Fläche MN' auf $\frac{1}{100}$ ihres Inhalts herabkommen, und der von ihr erlittene Druck vermindert sich nahezu in demselben Verhältniß; das Gewicht des Prisma's dagegen reducirt sich auf $\frac{1}{1000}$ seines vorigen Werthes; das Verhältniß dieses Gewichts zu dem Drucke auf die Fläche MN' ist näherungsweise durch $\frac{1}{10}$ ausgedrückt, verringert sich also fast proportional mit den Dimensionen des Prisma's. Man schließt hieraus, daß, je näher der mittlere Druck an seine Grenze kommt, die der Schwere analogen Kräfte mehr und mehr vernachläßigt werden dürfen, und daß mithin zuletzt das Gleichgewicht sich blos durch die Drücke erhält. Projicirt man die letztern auf eine zu LN parallele Axe, so verschwinden in der Projection die zu den Flächen NL', LMN, L'M'N' normalen Drücke, da sie senkrecht zu dieser Axe sind; es bleiben also nur noch die auf die Flächen MN', ML' wirkenden Drücke, welche, indem sie gleiche Winkel gegen LN bilden, nur dann gleiche Projectionen haben können wenn sie selbst einander gleich sind; und weil ferner die ebenerwähnten Flächen gleiche Größe haben, so folgt, daß die auf einerlei Flächeneinheit bezogenen Drücke, welche in zwei zu beliebigen Ebenen MN', ML' senkrechten Richtungen stattfinden, gleich sein müssen.

*) d. h. überhaupt Kräfte, welche der Masse proportional sind, wie die Schwere selbst, oder — falls die Flüssigkeitstheilchen blos in relativer Ruhe sind, während eine absolute Rotationsbewegung stattfindet — die Centrifugalkraft.

Bei einer gasförmigen Flüssigkeit wird die Pressung nicht selten elastische Kraft oder Spannkraft genannt; auch findet man dafür den ungeeigneten Namen Spannung, welcher ausschließlich für anziehende Wechselwirkungen aufbehalten bleiben sollte.

412. Eine zweite Folgerung aus der Abwesenheit der Reibung zwischen den Flüssigkeitstheilchen besteht darin, daß, wenn auf eine ruhende Flüssigkeit keine weitern äußern Kräfte wirken als die Schwere und die von den umgebenden Wänden geübten Drücke, jede ununterbrochene horizontale Schicht (von unendlich kleiner Dicke) in ihrer ganzen Ausdehnung einerlei Pressung zeigt und einerlei Dichtigkeit hat.

1) Von der Gleichheit der Pressung überzeugt man sich, wenn man einen prismatischen Flüssigkeitsfaden betrachtet, welcher zwischen zwei beliebigen Puncten der Horizontalschicht enthalten ist. Dieser Faden wird an seinen beiden Enden in den zwei entgegengesetzten Richtungen, welche mit der Lage des Fadens zusammenfallen, gleichstark gedrückt; denn sonst müßte er, bei dem Mangel der Reibung, in Bewegung gerathen (409). Sind aber die Drücke auf die Endpuncte gleich im angegebenen Sinne, so sind sie auch gleich in jedem beliebigen Sinne (411).

2) Um zu zeigen, daß eine zusammenhängende Horizontalschicht überall die nämliche Dichtigkeit hat, seien AB, A'B' (Fig. 55) zwei einander sehr nahe liegende horizontale Ebenen. In jeder derselben, für sich betrachtet, herrscht nach ihrer ganzen Ausdehnung ein gleichförmiger Druck, wie wir so eben gesehen haben. Nun ist der Druck auf das Element m' gleich dem Drucke in m, vermehrt um das Gewicht der elementaren verticalen Säule mm', weil an den Seitenflächen dieser Säule keine Reibung stattfindet; das Nämliche gilt von irgend einer andern gleichgroßen Säule m_1m_1'; beide Säulchen haben daher gleiche Gewichte bei gleichem Volumen, woraus der Satz folgt (101).

Ist der Zusammenhang der Schicht gestört, so kann sich's anders verhalten. Bei zwei communicirenden Gefäßen kann es vorkommen, daß die Gleichheit der Pressung und der Dichtigkeit nur für diejenigen Schichten besteht, deren Erstreckung im Gefäße keine Unterbrechung erleidet (wie AB oder CD), während man Pressung und Dichtigkeit möglicherweise geändert findet wenn man von einer Schicht AB auf eine in derselben Horizontalebene liegende Schicht ab übergeht.

413. Für eine homogene incompressible Flüssigkeit, welche sich in Ruhe befindet, läßt sich der Unterschied der Pressungen in zwei verschiedenen Horizontalebenen sehr einfach ausdrücken, vorausgesetzt daß man von

der einen Ebene zur andern übergehen kann ohne die Flüssigkeit zu verlassen. Ist h der verticale Abstand beider Ebenen und Π das Gewichte eines Cubikmeters der Flüssigkeit, so ist die erwähnte Differenz Πh; so daß, wenn $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ die Pressungen in der obern und in der untern Ebene bezeichnen, die Gleichung gilt

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \Pi h. \qquad [114]$$

Um dieß nachzuweisen, mögen zuerst die beiden Ebenen A_0B_0, A′B′ (Fig. 56) so gestellt sein, daß man von der einen auf die andere längs einer verticalen Flüssigkeitssäule m′n′ gelangen kann, deren Höhe durch h′ und deren Querschnittsfläche durch a bezeichnet sei. Der Druck auf die obere Basis ist $\mathfrak{P}_0$a; die untere Basis hat außerdem noch das Gewicht Πah′ der Flüssigkeitssäule zu ertragen. Der Gesammtdruck auf die untere Basis ist demnach $\mathfrak{P}_0 a + \Pi a h'$; woraus folgt, daß der Druck auf die Flächeneinheit dieser Basis, mithin überhaupt die Pressung in der Ebene A′B′, durch $\mathfrak{P}_0 + \Pi h'$ dargestellt wird.

Wenn aber die beiden Horizontalebenen ganz beliebige Stellungen A_0B_0, AB haben, welche um h von einander entfernt sind, so kann man immer zwischen ihnen andere horizontale Ebenen A′B′, A″B″, A‴B‴ so einschalten, daß sich von jeder zur folgenden eine verticale Linie ganz innerhalb der Flüssigkeit ziehen läßt. Für diese einzelnen Intervalle gibt die vorige Formel die aufeinander folgenden Unterschiede der Pressungen an, und hieraus berechnet man den Gesammtunterschied innerhalb der beiden äußersten Ebenen. Das Resultat stimmt mit der oben angegebenen Regel überein.

Fallen die beiden Schichten A_0B_0, AB in einerlei Ebene, wie AB, ab (Fig. 55), so wird hier, da h null ist, die Pressung in beiden Schichten gleich, sobald man nämlich von der einen Schicht zur andern eine Linie wie qrst ziehen kann, welche die homogene Flüssigkeit nicht verläßt.

414. Zu der Formel [114] gelangt man auch durch den Lehrsatz vom Arbeitseffect, wenn man für langsame Bewegungen einer Flüssigkeit die Gesammtarbeit der Wechselwirkungen als null annimmt, was eine Folgerung aus dem Mangel der Zusammendrückbarkeit (oder aus der I n c o m p r e s s i b i l i t ä t) und aus der Abwesenheit der Reibung ist.

Wir betrachten eine gewisse Menge Flüssigkeit, welche in einen polyedrischen Raum eingeschlossen ist (Fig. 57). Es sei a_0 der Inhalt eines sehr kleinen Stückes A_0B_0 der einen Wandfläche und $\mathfrak{P}_0$ die dort stattfindende Pressung; a und $\mathfrak{P}$ seien die analogen Größen für das Wandstückchen AB. Man stelle sich vor, statt dieser Wandstücke seien bewegliche Kolben eingesetzt, welche mit den Drücken $\mathfrak{P}_0 a_0$, $\mathfrak{P}$a belastet sind, während die übrige Umkleidung unbe-

weglich bleibt. Vermehrt man dann die Kraft $\mathfrak{P}_0 a_0$ um einen sehr kleinen Bruchtheil ihres Werthes, so nehmen die Kolben A_0B_0, AB eine sehr langsame Bewegung an, welcher man nach einer sehr geringen Verschiebung Einhalt thun kann, indem man die an A_0B_0 hinzugefügte Kraft wieder wegnimmt und der auf AB wirkenden widerstehenden Kraft $\mathfrak{P}a$ einen ebenfalls sehr kleinen Zuwachs ertheilt. Nachdem die Kolben die kleinen Wege s_0, s zurückgelegt haben, wenden wir den Lehrsatz des Arbeitseffects an, wobei zu bemerken, daß die Arbeiten der zugelegten Kräfte (da diese in Rücksicht der ursprünglichen Kräfte so klein sein können als man nur will) vernachläßigt werden dürfen, und daß die lebendige Potenz zu Anfang und zu Ende null ist. Die Arbeit auf den Kolben A_0B_0 ist $\mathfrak{P}_0 a_0 s_0$; die von dem Kolben AB aufgenommene Arbeit $-\mathfrak{P}as$ ist $= -\mathfrak{P}a_0 s_0$, weil wegen der Incompressibilität die Rauminhalte ABCD, $A_0B_0C_0D_0$, von denen der eine durch as, der andere durch $a_0 s_0$ ausgedrückt wird, einander gleich sind. Die von der Schwere stammende Arbeit ist das Product aus dem Gewichte der Flüssigkeit welche einen jener Rauminhalte erfüllt, und dem Niveau-Unterschied zwischen A_0B_0 und AB, d. i. dem verticalen Abstande um welchen AB tiefer liegt als A_0B_0 (125). Ist h dieser Unterschied und Π das Gewicht eines Cubikmeters Flüssigkeit, so ist die genannte Arbeit $\Pi a_0 s_0 h$. Die Arbeit der übrigen äußern Kräfte endlich, d. h. der durch die unbeweglichen Wände ausgeübte Druck ist null. Als Gleichung des Arbeitseffects hat man daher

$$\mathfrak{P}_0 a_0 s_0 + \Pi a_0 s_0 h - \mathfrak{P} a_0 s_0 = 0, \quad \text{woraus folgt} \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0 + \Pi h.$$

415. Setzt man in diese Formel $\mathfrak{P}_0 = 0$, d. h. wird die Höhe h von einer Ebene aus gemessen in welcher die Pressung null ist, so erhält man

$$\mathfrak{P} = \Pi h, \quad \text{oder} \quad h = \frac{\mathfrak{P}}{\Pi}.$$

Aus diesem Grunde heißt der Quotient aus einem auf die Flächeneinheit bezogenen Drucke $\mathfrak{P}$, dividirt durch das Gewicht Π der Volumeinheit der Flüssigkeit, die den Druck $\mathfrak{P}$ angebende Höhe dieser Flüssigkeit, oder kurz die Druckhöhe.

416. Wenn mehrere verschiedene Flüssigkeiten, welche sich nicht mengen, in einem und demselben Gefäß in Ruhe sind, so ändert dieß nichts an der Beweisführung in Nr. 412; jede ununterbrochene horizontale Elementarschicht ist also homogen (d. i. durchaus von gleicher Dichtigkeit); woraus folgt, daß die Trennungsfläche zweier benachbarten Flüssigkeiten eine Horizontalebene ist. Hier sind aber zwei Fälle zu unterscheiden. Ist von zwei benachbarten Flüssigkeiten die untere dichter als die obere, so ist das unter der Wirkung der Schwere stattfindende Gleichgewicht stabil, d. h. von der Art, daß es

sich, wenn es aus einer zufälligen Ursache gestört werden sollte, nach dem Wegfall dieser Ursache von selbst wieder herstellt. Ist hingegen die höherliegende Flüssigkeit die dichtere, so reicht die geringste Störung in der Horizontalität der Trennungsfläche hin, um ein Herabsinken der dichtern Flüssigkeit in die tiefere Lage zu veranlassen.

Es sei nämlich ABC (Fig. 58) die aus ihrer natürlichen Lage gebrachte Trennungsfläche, längs welcher wir uns eine feste Zwischenwand ohne Dicke und Schwere denken; und wir nehmen an, in B seien die beiden Seiten dieser Scheidewand gleichstark gedrückt, was in der ganzen Ausdehnung der Fläche stattfinden müßte wenn Gleichgewicht bestehen sollte. Ist $\mathfrak{p}$ die Pressung in B, so wird die in A auf die obere Fläche der Scheidewand wirkende Pressung durch $\mathfrak{p} + \Pi h$ ausgedrückt, wobei Π das Gewicht für den Cubikmeter der obern Flüssigkeit bezeichnet, und h den Niveau-Unterschied zwischen B und A (413). Die Pressung in A auf die untere Fläche der Scheidewand ist $\mathfrak{p} + \Pi' h$, wenn Π' das Gewicht für den Cubikmeter der untern Flüssigkeit angibt. Ist daher Π' größer als Π, so sind die Flüssigkeitstheilchen in A von unten stärker gedrückt als von oben, und sie streben deßhalb in das Niveau von B aufzusteigen sobald die Scheidewand weggenommen wird; zugleich suchen die Theilchen von höherem Niveau (wie C) sich in jenes von B zu senken. Das Gegentheil tritt ein wenn Π größer als Π' ist; nach Entfernung der Zwischenwand wird bei A die obere Flüssigkeit sinken, bei C die untere Flüssigkeit steigen.

Es ist klar, daß die hier nachgewiesene Eigenschaft auch für eine und dieselbe schwere Flüssigkeit irgendwelcher Art gilt, wenn die Dichtigkeit derselben sich von einer Schicht zur andern entweder schrittweise oder stetig verändert.

417. In einer Flüssigkeit, welche aus Schichten von verschiedenen Dichtigkeiten besteht, finde am Puncte A_0 die Pressung $\mathfrak{p}_0$, am Puncte A die Pressung $\mathfrak{p}$ statt. Kann man von einem dieser Puncte zum andern auf einem Wege gelangen, welcher die Flüssigkeit nicht verläßt und verschiedene Schichten durchschneidet, deren verticale Höhen h′, h″, h‴, ... und deren Gewichte auf den Kubikmeter Π', Π'', Π''', ... sind, so gilt die Gleichung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 + \Pi' h' + \Pi'' h'' + \Pi''' h''' + \ldots,$$

wobei die Höhen h′, h″, h‴, ... positiv zu nehmen sind wenn jener Weg im Sinne von oben nach unten durch die betreffenden Schichten geht, im andern Falle negativ.

Dieß ist eine offenbare Folge aus Nr. 413.

§. 2. Apparate welche auf den Haupteigenschaften der Flüssigkeiten beruhen.

418. Hydraulische Presse. — Diese Maschine, welche man in den Lehrbüchern der Physik beschrieben findet, gründet sich auf eine Uebertragung des Drucks und der Arbeit (327, 414) durch Vermittelung einer Flüssigkeit. Zu bemerken ist hiebei, daß, obwohl durch einen kleinen Druck ein sehr beträchtlicher erzeugt wird, dennoch (der Reibung wegen) die Bewegungsarbeit stets größer ist als die Nutzarbeit.

419. Barometer. — Die atmosphärische Pressung wird durch das Barometer gemessen. Ist h die Barometerhöhe, Π_M das Gewicht eines Kubikmeters Quecksilber*) von der eben stattfindenden Temperatur, $\mathfrak{p}_a$ der Druck der Atmosphäre auf den Quadratmeter, so hat man $\mathfrak{p}_a = h\Pi_M$; denn die Pressung am innern Quecksilberspiegel ist null, wegen des leeren Raums im obern Theil der Barometerröhre. Dieß wäre übrigens nicht mehr der Fall, wenn statt des Quecksilbers eine Flüssigkeit angewendet würde welche bei der gerade vorhandenen Temperatur merkliche Dämpfe entwickelt.

Bei der Temperatur 0° ist $\Pi_M = 13598^{kg}$. Der Coefficient für die cubische Ausdehnung des Quecksilbers ist $\frac{1}{5550}$. Bezeichnet ϑ die Temperatur des Quecksilbers nach hunderttheiliger Scala, so schließt man

$$\Pi_M = 13598 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\vartheta}{5550}} = 13598 \left(1 - \frac{\vartheta}{5550 + \vartheta}\right)$$

und hieraus

$$\mathfrak{p}_a = 13598^{kg} \left(1 - \frac{\vartheta}{5550 + \vartheta}\right) h. \qquad [115]$$

Die Größe $\left(1 - \frac{\vartheta}{5550 + \vartheta}\right) h$ ist die auf die Temperatur 0° reducirte Barometerhöhe. Am Meeresspiegel beträgt ihr mittlerer Werth $0^m,76$, der Werth von $\mathfrak{p}_a$ also 13598 . 0,76 oder 10334^{kg}; wir bezeichnen letzteren durch p_a, wodurch die vorige Formel übergeht in

$$\mathfrak{p}_a = \left(1 - \frac{\vartheta}{5550 + \vartheta}\right) \frac{h}{0,76}\, p_a.$$

*) Merkur; daher das Zeichen Π_M.

Die äußere und die innere Wandfläche der Barometerröhre erleiden verschiedene Pressungen. Würde man daher in die Wand ein feines Loch bohren, so müßte Luft durch dasselbe in die Röhre dringen und Quecksilber in das Gefäß (die Cuvette) des Barometers herabsinken.

420. Ist eine elastische Flüssigkeit in einem verschlossenen Raume enthalten, so kann man die von ihr geübte Pressung mittels eines Barometers messen, dessen Gefäß mit jenem Raume in Communication steht. Wenn die zu messende Pressung nur gering ist, kann der geschlossene Schenkel des Barometers kurz sein. Die anzuwendende Formel ist die nämliche wie oben.

421. Manometer in freier Luft. — Fragt man, um wieviel die Pressung einer eingeschlossenen Flüssigkeit von der atmosphärischen Pressung verschieden ist, so läßt sich dieser Unterschied mit Hülfe der in Fig. 59 abgebildeten Röhre oder durch ähnliche Vorrichtungen messen. Jene Röhre führt den ungeeigneten Namen Manometer*) in freier Luft. Der Niveau-Unterschied h', multiplicirt mit dem Gewichte eines Kubikmeters der im Manometer benützten Flüssigkeit, gibt den gesuchten Unterschied der Pressung, welchen man, je nach den Umständen, zur atmosphärischen Pressung addiren oder von dieser subtrahiren muß, um die Pressung der eingeschlossenen Flüssigkeit zu erhalten.

Weiß man im Voraus, daß der zu ermittelnde Unterschied jedenfalls groß ist, so wird als Manometer-Flüssigkeit Quecksilber genommen.

422. Zuweilen bedient man sich einer mehrmals gebogenen Röhre (Fig. 60), welche in den untern Theilen Quecksilber, im übrigen Raume Wasser enthält. Sind die Räume AB, CB', C'B'', C''B''' mit Wasser, die Räume BC, B'C', B''C'', B'''C''' mit Quecksilber erfüllt, so ist der Unterschied der Pressung in A und in C''' gleich der Differenz zweier Producte von je zwei Factoren; die Factoren des ersten Products (des Minuenden) sind das Gewicht des Kubikmeters Quecksilber und die Summe der Niveau-Unterschiede von B bis C, von B' bis C', von B'' bis C'' und von B''' bis C'''; das zweite Product wird gebildet durch das Gewicht eines Kubikmeters Wasser und die Summe der Niveau-Unterschiede zwischen A und B, C und B', C' und B'', C'' und B'''.

423. Piezometrische Röhren. — Der Druck des Wassers in einer Leitung kann mittels eines engen Rohres bestimmt werden, welches sich von der Leitung abzweigt und mit seinem Ende vertical emporsteht (Fig. 61). An diesem

---

*) Dieses Wort, abgeleitet aus dem griechischen μανός, dünn, paßt eigentlich nur auf ein abgekürztes Barometer, welches zur Messung der Luftverdünnung dient, wie im Recipienten der Luftpumpe. Den obigen Apparat sollte man Piezometer nennen. (Vgl. d. Note zu Nr. 423.)

Ende schließt sich eine Glasröhre an, so hoch als die möglichen Aenderungen im Spiegel der Wassersäule es erfordern. Auf der Wand der Glasröhre ist ein Zeichen angemerkt, dessen Höhe über der Leitung aus einem Nivellement bekannt sein muß. D'Aubuisson, welcher Apparate solcher Art in Toulouse einrichten ließ, hat sie Piezometer *) benannt.

424. Um einen kleinen Pressungsunterschied an zwei benachbarten Puncten zweier Leitungsröhren zu messen, denen eine Vertheilung des Wassers obliegt, hat Genieys (auf den Rath des Verfassers) sich eines Apparats bedient den man Differentialpiezometer nennen könnte. Zwei biegsame Bleirohre (Fig. 62) schließen sich bei A, E an die Leitungsröhren an; ihre Enden sind durch eine umgebogene Glasröhre BCD verbunden, und in dieser befindet sich bei C eine enge Ausmündung, welche man nach Belieben öffnen oder luftdicht verschließen kann. Die Hähne A, E sind anfangs geschlossen und die Bleirohre mit Luft erfüllt. Man schließt die Ausmündung C und öffnet die Hähne A, E; die Luft wird durch das Wasser gegen den Punct C gedrängt, wobei man darüber zu wachen hat daß sie sich nicht in den Biegungen der Bleirohre festsetze; und wenn das Wasser nicht in den verticalen Schenkeln der Glasröhre sichtbar werden will, gewährt man der Luft einen kleinen Ausweg durch Lüpfung des Stöpsels in der Mündung C, welche man aber sogleich wieder fest verschließt sobald die Spiegel der beiden Wassersäulen sich über die Puncte b, d erheben. Aus dem Unterschied im Stande dieser Spiegel und aus dem Niveau-Unterschied der Puncte A, E ergibt sich die Höhe welche den gesuchten Pressungsunterschied anzeigt; denn der Unterschied der Pressungen, welche die in BCD eingeschlossene und comprimirte Luft auf die Wasserspiegel B, D übt, kann vernachläßigt werden. — Die Angaben dieses Instruments sind, wie man sieht, unabhängig von den (manchmal sehr großen) Pressungen selbst, um deren Differenz sich's handelt.

425. Sicherheitsröhren. — Die Fig. 63 zeigt eine Anordnung von Flaschen und Röhren, welche unter dem Namen des Woolf'schen Apparats bekannt ist und in chemischen Laboratorien häufig benützt wird. Das Gefäß A enthält Substanzen aus denen sich nach und nach eine große Menge Gas entbindet, welches, um in die Atmosphäre oder in die Glasglocke E zu gelangen, seinen Weg durch die Röhren FG, IK, LM und durch die in den Gefäßen B, C, D enthaltenen Flüssigkeiten nehmen muß. An die Communicationsröhre FG ist in N eine mit einer kugelförmigen Erweiterung

---

*) Dieser Name (nach dem griechischen πιέζειν, pressen) erscheint in der von d'Aubuisson (Traité d'Hydraulique, p. 249) ihm zugeschriebenen Bedeutung sehr bezeichnend; wir nehmen ihn an, obgleich physikalische Lehrbücher ihn für einen Apparat gebrauchen welcher zur Messung der Compression einer Flüssigkeit dient.

versehene Sicherheitsröhre NPQR angesetzt, und in diese wurde eine Flüssigkeit gegossen, welche, falls in den beiden Schenkeln QP, QR gleiche Pressung herrscht, sich ungefähr bis zur Mitte der Kugel erhebt. In die mittleren Hälse (Tubulirungen) der Flaschen sind gerade Röhren SS′, TT′ eingepaßt, welche an beiden Enden offen sind und etwa um 5 oder 6 Millimeter in die Flüssigkeiten der Gefäße eintauchen.

An diesem Apparate bietet sich nun Zweierlei zur Untersuchung dar.

1) Kennt man die Tiefen h, h′, h″, um welche die unteren Mündungen G, K, M der Communicationsröhren unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen in die sie eingetaucht sind, so kann man die Pressung berechnen, welche das Gas in jedem Gefäße ausübt, sobald der Apparat in regelmäßigem Gange ist. Das im Gefäße A erzeugte Gas erfüllt dann die Röhre FG, drängt aus dem eingetauchten Stücke die Flüssigkeit zurück, und verläßt in Blasen die Mündung G; zu gleicher Zeit erfüllt das Gas der Flasche B die Röhre IK, hält daraus die in der Flasche C befindliche Flüssigkeit entfernt und entweicht in Blasen bei K, während das Gas der Flasche C die Flüssigkeit aus der Röhre LM vertreibt und entweder in die Atmosphäre oder in den Recipienten E abzieht. Es folgt hieraus, daß (da das Gewicht des Gases, als sehr gering gegen das Gewicht der Flüssigkeit, zu vernachläßigen ist) die Pressung des Gases im Gefäße C der Pressung gleichkommt, welche in der Flüssigkeit des Gefäßes D im Niveau von M stattfindet; daß ferner die Pressung des Gases im Gefäße B gleich der Pressung der Flüssigkeit am Puncte K ist; und daß endlich die Gaspressung im Gefäße A mit der Flüssigkeitspressung am Puncte G übereinstimmt. Nimmt man also an, von jeder der Flüssigkeiten in den drei Gefäßen B, C, D habe der Kubikmeter das nämliche Gewicht Π, und wird durch $\mathfrak{P}_a$ die atmosphärische Pressung bezeichnet, welche unmittelbar auf die Flüssigkeit im Gefäße D wirkt, — durch $\mathfrak{P}$ die Pressung des Gases im Gefäße C, — durch $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ die analogen Größen für die Gefäße B und A: so hat man, in Uebereinstimmung mit der Formel [114] der Nr. 413:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_a + \Pi h, \qquad \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} + \Pi h', \qquad \mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}' + \Pi h'',$$

woraus folgt

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}_a + \mathfrak{P}\,(h' + h)$$

und

$$\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}_a + \Pi\,(h'' + h' + h).$$

Bei dieser Lage der Dinge erhebt sich, wie man leicht sieht, die Flüssigkeit des Gefäßes C, dessen Gas die Pressung $\mathfrak{P}$ übt, in der Röhre TT′ zu einer Höhe = h über den umgebenden Spiegel; in der Röhre SS′ steigt die Flüssigkeit um die Größe h′ + h, welche (415) den Ueberschuß der Pressung $\mathfrak{P}'$ über die atmosphärische Pressung angibt; endlich ist der Niveau-

unterschied der Flüssigkeit in den beiden Schenkeln der Röhre PQR gleich $h'' + h' + h$.

2) Um sich Rechenschaft zu geben, welche Verrichtungen der Röhren PQR, SS', TT' ihnen den Namen Sicherheitsröhren erworben haben, nehme man an, es habe im Entbindungsgefäße A die Pressung des Gases aus irgend einer Ursache (etwa wegen Abkühlung) sich vermindert und sei geringer geworden als die atmosphärische Pressung, während die Pressung $\mathfrak{p}'$ in der Flasche B die alte geblieben ist. Wäre nun die Röhre PQR nicht vorhanden, so könnte die Flüssigkeit der Flasche B durch den Druck $\mathfrak{p}$ in der Röhre GF aufwärts getrieben werden und in das Gefäß A abfließen; es fände dann, wie man sagt, Resorption oder Rücksaugung statt. Dieß wird aber durch die Röhre PQR verhindert. Die Abnahme der Pressung in A macht, daß die Flüssigkeit in dem Schenkel RQ sinkt und sich endlich ganz aus ihm zurückzieht; im andern Schenkel QP kann sie sich halten; und die Höhe h''' (Fig. 64), welche sie dort einnimmt, hängt von dem Hohlraume der Kugel ab, der etwas größer sein muß als das Volum der in die Röhre gegossenen Flüssigkeit. Findet in dieser Lage Gleichgewicht statt, so befriedigt die Pressung im Gefäße A, die wir durch $\mathfrak{p}_1''$ bezeichnen, die Gleichung $\mathfrak{p}_1'' = \mathfrak{p}_a - \Pi h'''$; sie ist also geringer als die Pressung in der Flasche B; denn aus den vorhergegangenen Relationen schließt man

$$\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}_1'' = \Pi\,(h''' + h' + h).$$

Hieraus folgt, daß in diesem Augenblicke die Flüssigkeit der Flasche B in dem Schenkel GN die Höhe $h''' + h' + h$ erreicht; und diese Erhebung kann nie merklich überschritten werden; denn wenn die Pressung in A noch weiter abnimmt, so steigt die atmosphärische Luft im Schenkel QP in die Höhe, dringt durch die Kugel, und gelangt in das Gefäß A, wo sie die Pressung $\mathfrak{p}_1''$ wiederherstellt.

Die Röhre SS' spielt eine ähnliche Rolle für den Fall, daß die Pressung im Gefäß B sich verringert hat. Sobald diese Pressung etwas kleiner als die atmosphärische geworden ist, tritt die Luft bei S ein, während die Flüssigkeit der Flasche C durch die Mündung K in die Röhre KI bis zu einer Höhe eindringt, welche, vom Flüssigkeitsspiegel im Gefäße aus gemessen, nur sehr wenig größer ist als die Steighöhe h der Flüssigkeit in der Röhre TT'. Die Rücksaugung ist also auch hier verhütet.

§. 3. Relation zwischen Volum, Gewicht, Temperatur und Pressung eines Gases.

426. Betrachtet man von einer beliebigen Menge Flüssigkeit nur einen Theil, dessen Volum V und dessen Gewicht P ist, so gibt für diesen Theil

der Quotient $\frac{P}{V}$ das mittlere Gewicht auf die Einheit des Volums an. Bei einer elastischen Flüssigkeit ändert sich dieser Quotient, wenn man von einem Theile derselben zu einem andern übergeht. Behält man aber einen bestimmten Punct M innerhalb des von dieser Flüssigkeit eingenommenen Raumes im Auge, und läßt man ein um den Punct herumliegendes Volum immer kleiner und kleiner werden, so strebt der Quotient $\frac{P}{V}$ unaufhörlich einer Grenze zu, welche zwar nicht absolut constant für die ganze Ausdehnung der Flüssigkeit ist, wohl aber für den Punct M einen bestimmten Werth hat. Dieser Grenzwerth heißt das auf die Volum-Einheit bezogene Gewicht am Puncte M. Da wir als Einheit des Volums den Kubikmeter angenommen haben, so sagen wir kurz, jener Werth sei am Puncte M das Gewicht auf den Kubikmeter. Diese Größe, welche durch Π bezeichnet sein soll, ist übrigens auch für verschiedene Puncte einer ruhenden elastischen Flüssigkeit sehr nahe constant, wenn die Flüssigkeit in einem Gefäße von mäßigen Dimensionen enthalten ist.

427. Für ein und dasselbe Gas besteht zwischen dem auf die Volum-Einheit berechneten Gewicht Π an irgend einem Puncte, dem auf die Flächen-Einheit bezogenen Drucke $\mathfrak{P}$ an diesem Puncte (411) und der Temperatur des Gases eine sehr merkwürdige Relation; und diese ergibt sich aus zwei Naturgesetzen, welche in den Lehrbüchern der Physik nachgewiesen werden.

1) Das Mariotte'sche Gesetz sagt: Wenn die auf ein bestimmtes Gas wirkende Pressung sich ändert, während die Temperatur die nämliche bleibt, so ändert sich das zu einem constanten Gewicht gehörige Volum in umgekehrtem Verhältniß mit der Pressung; woraus folgt, daß das auf die Volum-Einheit berechnete Gewicht mit der Pressung im geraden Verhältniß steht.

Nimmt man nämlich zwei Portionen eines und desselben Gases, welche einerlei Gewicht haben, und sind die Volume V, V_1 dieser Gasmengen so klein, daß innerhalb derselben die Pressungen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, sowie die auf die Volum-Einheit berechneten Gewichte Π, Π_1 als gleichförmig betrachtet werden können, so hat man, bei einerlei Temperatur:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}} \qquad \text{oder} \qquad V\mathfrak{P} = V_1\mathfrak{P}_1;$$

und wenn man für V und V_1 ihre Werthe aus

$$\Pi = \frac{P}{V}, \qquad \Pi_1 = \frac{P}{V_1}$$

substituirt, so ergibt sich

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}_1}.$$

2) Wenn die Temperatur eines Gases sich ändert, während die Pressung constant bleibt, so sind für gleiche Zunahmen der Temperatur auch die entsprechenden Zunahmen gleich, welche ein zu einem constanten Gewicht gehöriges Volum erfährt.

Dieß ist das Gay-Lussac'sche Gesetz.

Demnach ist das veränderliche Volum eine Function ersten Grades von der Temperatur ϑ; und wenn c eine Constante bezeichnet, kann man anschreiben

$$V = c(1 + \alpha\vartheta); \quad V' = c(1 + \alpha\vartheta'), \quad \text{also} \quad \frac{V}{V'} = \frac{1 + \alpha\vartheta}{1 + \alpha\vartheta'}$$

Setzt man für V und V' die Werthe $\frac{P}{\Pi}$ und $\frac{P}{\Pi'}$, so folgt

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{1 + \alpha\vartheta}{1 + \alpha\vartheta'}.$$

Der Ausdehnungscoefficient α hängt von dem Nullpunct und der Eintheilung der Thermometerscala ab. Uebrigens ist er sehr nahe der nämliche für alle elastischen Flüssigkeiten. Für die gebräuchliche hunderttheilige Scala kann man, nach Regnault's Versuchen, bei den gewöhnlichen Anwendungen

$$\alpha = 0{,}00367$$

setzen.

Verbindung der beiden obigen Gesetze. — Es sei Π das Gewicht auf die Volum-Einheit, $\mathfrak{p}$ der Druck auf die Flächen-Einheit, ϑ die Temperatur eines Gases; Π', $\mathfrak{p}'$, ϑ' seien die Werthe welche diese drei Größen in einer andern Portion oder für einen andern Zustand des nämlichen Gases annehmen. Ferner denken wir uns einen Zwischenzustand, in welchem das auf die Volum-Einheit bezogene Gewicht Π_1 der ersten Temperatur ϑ und der zweiten Pressung $\mathfrak{p}'$ entspricht.

Wegen der gemeinsamen Temperatur gibt das Mariotte'sche Gesetz

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'};$$

und wegen der gemeinsamen Pressung folgt aus dem Gay-Lussac'schen Gesetz

$$\frac{\Pi_1}{\Pi'} = \frac{1 + \alpha\vartheta'}{1 + \alpha\vartheta}.$$

Durch Multiplication erhält man

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'} \cdot \frac{1 + \alpha\vartheta'}{1 + \alpha\vartheta}. \qquad [116]$$

Ersetzt man Π und Π' durch $\frac{P}{V}$ und $\frac{P'}{V'}$, so findet man das Verhältniß zwischen den Volumen V, V′ zweier Portionen eines und desselben Gases als Function ihrer Gewichte P, P′, ihrer Pressungen und ihrer Temperaturen; nämlich

$$\frac{V}{V'} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}} \cdot \frac{1+\alpha\vartheta}{1+\alpha\vartheta'}. \qquad [117]$$

428. Da sich die Gleichung [116] in die Form

$$\frac{\Pi\,(1+\alpha\vartheta)}{\mathfrak{p}} = \frac{\Pi_{\prime}\,(1+\alpha\vartheta')}{\mathfrak{p}'}$$

bringen läßt, so folgt, daß die Größe $\frac{\Pi\,(1+\alpha\vartheta)}{\mathfrak{p}}$ constant ist, so lange sich's um Gas von der nämlichen Natur handelt. Dieß läßt sich durch die Formel

$$\Pi = \frac{\mathfrak{p}}{k\,(1+\alpha\vartheta)} \qquad [118].$$

ausdrücken; wobei aber zu beachten ist, daß die Größe k, welche unveränderlich bleibt wenn Pressung und Temperatur eines und desselben Gases wechselt, sich ändert beim Uebergange von einer Gasart zu einer andern.

Zur Bestimmung dieser Constanten reicht für jede Gasart ein einziger Versuch aus. Man hat z. B. gefunden, daß ein Kubikmeter atmosphärischer Luft bei der Temperatur 0^0 und bei einem mittlern Drucke von 10334^{kg} auf den Quadratmeter (welcher der Barometerhöhe von $0^m,76$ entspricht) ein Gewicht von $1^{kg},300$ hat. Daraus folgt, daß, wenn $\mathfrak{p}_a$ jene Pressung bezeichnet, für atmosphärische Luft von beliebiger Temperatur und bei beliebiger Pressung die Formel gilt

$$\Pi = 1{,}300\,\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a} \cdot \frac{1}{1+\alpha\vartheta}. \qquad [119]$$

429. Wendet man die Formel [118] auf zwei verschiedene Gasarten an, indem man der Größe k für jedes Gas ihren zugehörigen besondern, aber unveränderlichen Werth gibt, so gelangt man zu der wichtigen Eigenschaft, daß für zwei bestimmte Gasarten bei gleichen (übrigens beliebigen) Temperaturen und Pressungen die Gewichte der Volum-Einheiten in constantem Verhältniß stehen; eine Eigenschaft, welche die Genauigkeit des Mariotte'schen Gesetzes und die Unveränderlichkeit des Ausdehnungscoefficienten α voraussetzt.

430. In den Lehrbüchern der Physik und Chemie findet man Tafeln über die Gewichtsverhältnisse verschiedener Gase zur atmosphärischen Luft,

bei gleichem Volum, gleicher Pressung und gleicher Temperatur. Diese Zahlen führen den Namen tabellarische Dichtigkeiten, welcher daran erinnern soll daß die Tafeln (Tabellen) einerlei Pressung und einerlei Temperatur voraussetzen; sie geben also nicht die eigentlichen Dichtigkeiten (101) an, sondern die Verhältnisse der Gasdichtigkeiten zur Dichtigkeit der atmosphärischen Luft.

So ist z. B.

die tabellarische Dichtigkeit des reinen Wasserstoffgases . . .	0,0691
" " " des Sumpfgases (wenig verschieden von der des Leuchtgases)	0,555
" " " des Wasserdampfs (ungefähr $^5/_8$) .	0,6235
" " " des Alcoholdampfes	1,6138
" " " des Schwefelätherdampfes . . .	2,5860
" " " des Quecksilberdampfes	6,976.

Bezeichnet δ die tabellarische Dichtigkeit irgend eines Gases, so hat man in Beziehung auf dieses Gas statt der Formel [119] die folgende:

$$\Pi = 1{,}300\,\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a}\cdot\frac{1}{1+\alpha\vartheta}\,\delta. \qquad [120]$$

Das Verhältniß $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a}$ heißt die in Atmosphären ausgedrückte Pressung. Wird die Pressung $\mathfrak{p}$ durch die Quecksilberhöhe h im Barometer bestimmt, so ist $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a} = \frac{h}{0^m{,}76}$.

431. Chemiker und Physiker drücken zuweilen die Dichtigkeit eines Gases bei bestimmter Temperatur und Pressung dadurch aus, daß sie dieselbe mit der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei 0^0 Temperatur und der entsprechenden Pressung von $0^m{,}76$ vergleichen. Dieser Ausdruck liefert nichts weiter als ein Verhältniß; und wenn man ihn durch D bezeichnet, so ist seine Beziehung zur tabellarischen Dichtigkeit δ durch die Gleichung

$$D = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a}\cdot\frac{1}{1+\alpha\vartheta}\,\delta$$

ausgesprochen.

432. Die Formel [120] bezieht sich nicht blos auf permanente Gase (so genannt, weil sie nur durch außerordentlich großen Druck und weitgetriebene Erkältung in tropfbar flüssigen Zustand übergeführt werden können), sondern auch auf Dämpfe. So ist z. B. die tabellarische Dichtigkeit des

Wasserdampfs ungefähr $^5/_8$; d. h. das Gewicht einer Volum-Einheit Wasserdampf beträgt $^5/_8$ vom Gewichte des gleichen Volums atmosphärischer Luft von der nämlichen Pressung und Temperatur.

Der einzige Vorbehalt bei dieser Formel [120] ist, daß für eine elastische Flüssigkeit von gegebener Natur und für eine bestimmte Temperatur ϑ der Druck $\mathfrak{p}$ einen gewissen Werth nicht überschreiten kann, ohne einen Uebergang in den tropfbarflüssigen Zustand herbeizuführen. Diesem Werthe des Drucks entspricht die größte Dichtigkeit welche jene elastische Flüssigkeit bei der bestimmten Temperatur ϑ annehmen kann. Man sagt dann, die elastische Flüssigkeit befinde sich für diese Temperatur im Zustande der Sättigung.

Für Wasserdampf (ohne Beimischung eines andern ponderabeln Stoffes) zeigt die hierneben beigefügte Tafel die Werthe der größten Pressung und größten Dichtigkeit bei verschiedenen Temperaturen*). Die beiden ersten Spalten sind Ergebnisse directer Versuche; die übrigen wurden durch Rechnung erhalten, die fünfte namentlich durch die Formel [120].

433. Arago und Dulong, denen man die Hauptversuche über die Beziehungen zwischen der Pressung des Wasserdampfes und seiner Temperatur verdankt, haben nach den Resultaten dieser Versuche eine Interpolationsformel construirt, welche auf die folgende zurückkommt:

$$\frac{\vartheta - 100}{100} = \frac{1}{0{,}7153}\left(\sqrt[5]{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a}} - 1\right),$$

oder

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a} = \left[1 + 0{,}7153\left(\frac{\vartheta - 100}{100}\right)\right]^5,$$

wobei ϑ die Temperatur in Centesimalgraden und $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_a}$ die Pressung in Atmosphären bedeutet.

Substituirt man den als Function von $\mathfrak{p}$ ausgedrückten Werth von ϑ, welcher sich aus der erstern Formel ergibt, in der Gleichung [120], so erhält man eine algebraische Relation zwischen dem Gewicht Π des Kubikmeters und der Pressung. Betrachtet man aber mit einiger Aufmerksamkeit die Zahlen der fünften Spalte, von derjenigen an, welche der Pressung von $1^{\text{atm.}}$ entspricht, so sieht man, daß für Pressungen $\mathfrak{p}$, die in arithmetischer Progression stehen, die Gewichte Π eines Kubikmeters gesättigten Wasserdampfes ebenfalls beinahe gleiche Differenzen darbieten. Wenn man also nicht zu

---

*) Die Zahlen dieser Tafel sind einer größern Tafel entnommen, welche Morin im dritten Theile seiner angewandten Mechanik (Leçons de Mécanique pratique) bekannt gemacht hat.

Pressungen und Dichtigkeiten des Wasserdampfes
im Zustande der Sättigung bei verschiedenen Temperaturen.

Temperatur nach dem hundertheiligen Quecksilberthermometer.	Pressung im Sättigungszustande. in Atmosphären.	in Kilogr. auf den Quadratmeter.	nach der Quecksilberhöhe bei 0° in Metern.	Gewicht eines Kubikmeters Dampf.	Volum eines Kilogr. Dampf in Kubikmetern.
°	atm.	kg	m	kg	cm
— 20	0,0017	18	0,0013	0,0015	666,6670
— 10	0,0034	36	0,0026	0,0029	344,8280
0	0,0066	69	0,0050	0,0054	185,1850
10	0,0125	129	0,0095	0,0097	103,0930
20	0,0228	235	0,0173	0,0171	58,4795
30	0,0402	418	0,0306	0,0295	33,8982
40	0,0698	720	0,0530	0,0491	20,3666
50	0,1165	1205	0,0887	0,0797	12,5471
60	0,1905	1965	0,1447	0,1260	7,9365
70	0,3013	3112	0,2290	0,1932	5,1760
80	0,4633	4783	0,3521	0,2892	3,4578
90	0,6912	7136	0,5253	0,4196	2,3832
100	1,0	10330	0,7600	0,5913	1,6912
102,7	1,1	11363	0,836	0,6455	1,5494
105,2	1,2	12396	0,912	0,6995	1,4297
107,5	1,3	13429	0,988	0,7531	1,3279
109,7	1,4	14462	1,064	0,8064	1,2401
112,2	1,5	15495	1,140	0,8584	1,1650
114,3	1,6	16528	1,216	0,9106	1,0982
116,3	1,7	17561	1,292	0,9625	1,0390
118,0	1,8	18594	1,368	1,0147	0,9855
119,7	1,9	19627	1,444	1,0664	0,9377
121,4	2,0	20660	1,520	1,1174	0,8749
128,8	2,5	25825	1,900	1,3713	0,7293
135,1	3,0	30990	2,280	1,6201	0,6173
140,6	3,5	36155	2,660	1,8650	0,5363
145,4	4,0	41320	3,040	2,1067	0,4747
149,1	4,5	46485	3,420	2,3496	0,4256
153,1	5,0	51650	3,800	2,5860	0,3867
181,6	10,0	103300	7,600	4,8477	0,2063

große Veränderungen der Pressung im Auge hat, läßt sich mit ziemlicher Annäherung die Formel ansetzen

$$\Pi = a + b\mathfrak{p},$$

woraus für das Volum eines Kilogramms Dampf

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{1}{a + b\mathfrak{p}}$$

folgt, unter der Voraussetzung nämlich, daß der Raum mit der ganzen Dampfmenge gesättigt ist welche die Temperatur des Dampfes zuläßt. Navier (Annales des ponts et chaussées, *mars* 1835) und nach ihm Pambour (Théorie de la machine à vapeur) haben diese Bemerkung zur Anwendung gebracht.

Von einer bis zu fünf Atmosphären ist die sehr einfache Relation

$$\Pi = 0{,}1 + 0{,}5\,\frac{\mathfrak{p}}{p_a}$$

bis auf etwa $\frac{1}{50}$ genau.

Verlangt man eine größere Annäherung, so sind die Pressungsänderungen zwischen engeren Grenzen zu nehmen und demgemäß die Constanten a, b zu bestimmen, was keine Schwierigkeit hat.

434. Ein geschlossener Raum wird sich mit Dampf von bestimmter Art sättigen, wenn dieser Dampf lange genug mit tropfbarer Flüssigkeit von der nämlichen Natur beisammenbleibt. Ist jener Raum z. B. von Wasserdampf mit einem Ueberschusse tropfbaren Wassers erfüllt, so braucht man nur die gemeinschaftliche Temperatur des dampfförmigen und des tropfbaren Wassers zu kennen, um daraus mittels der Tafel die Pressung des Dampfes und sein Gewicht auf den Kubikmeter zu erschließen. Solange nun bei einem Steigen der Temperatur tropfbare Flüssigkeit überschüssig bleibt, nimmt sowohl die Pressung als die Dichtigkeit zu, wie man aus der Tafel ersieht, und beide bleiben unabhängig vom Volum; ist aber die Flüssigkeit völlig verdampft, so werden von diesem Augenblick an die Pressung $\mathfrak{p}$ und das Gewicht Π des Kubikmeters Functionen von der Temperatur ϑ, vom Volum V und vom Gewichte P des Dampfes, und diese Functionen sind durch die Formel [120] und durch die Gleichung $\Pi V = P$ gegeben; in der That besteht dann der gasförmige Körper bei den verschiedenen Graden seiner Ausdehnung immer aus den nämlichen materiellen Moleculen, und sein Gewicht P ist unveränderlich.

435. Setzt man in der Formel [120] $\vartheta = 0$ und $\mathfrak{p} = p_a$, während δ seine Bedeutung als tabellarische Dichtigkeit einer besondern elastischen

Flüssigkeit behält, so erhält man für das Gewicht eines Kubikmeters dieser Flüssigkeit in Kilogrammen (oder eines Liters in Grammen) bei der Temperatur 0^0 und unter der entsprechenden Pressung von $0^m,76$ Quecksilberhöhe den Werth $1{,}300\,\delta$. Damit aber dieses Resultat eine reelle Bedeutung habe, muß die betrachtete Flüssigkeit bei 0^0 die atmosphärische Pressung ertragen können. So wird man z. B. richtig sagen: ein Kubikmeter reinen und trockenen Wasserstoffgases wiegt bei jener Temperatur und Pressung $0^{kg},0898$. Dagegen beruht die Redensart: das Gewicht des Kubikmeters eines Dampfes bei 0^0 Temperatur und $0^m,76$ Pressung sei $1{,}300\,\delta$, auf einer blosen Fiction, wenn jener Dampf bei der Temperatur 0^0 und der gleichzeitigen atmosphärischen Pressung gar nicht bestehen kann; wie es z. B. mit den Dämpfen des Wassers, Alcohols, Quecksilbers der Fall ist, deren Existenz bei genannter Pressung die Temperaturen 100^0, 79^0, 350^0 erfordert.

436. Gemenge luftförmiger Flüssigkeiten. — Man habe verschiedene Gasarten in verschiedenen Quantitäten; Volum, Temperatur und Pressung seien für das erste Gas V', ϑ', $\mathfrak{p}'$; für das zweite V'', ϑ'', $\mathfrak{p}''$; für das dritte V''', ϑ''', $\mathfrak{p}'''$; ꝛc. Werden diese Gase gemengt, ohne daß irgend ein anderer Stoff hinzutritt, und findet dabei weder eine chemische Verbindung noch ein Niederschlag statt, so fragt sich, welches Volum V das Gemenge bei der Temperatur ϑ und der Pressung $\mathfrak{p}$ annehmen werde.

Wir reduciren zuerst alle Gase, noch ehe sie gemengt werden, auf die Pressung $\mathfrak{p}$ und die Temperatur ϑ. In diesem Zustande seien V'_1, V''_1, V'''_1,... ihre Volume; man findet diese durch die Formel [117], in welcher man $P = P'$ zu setzen hat, da das Gewicht jedes einzelnen Gases constant bleibt; es ergibt sich nämlich

$$V'_1 = \frac{V'\mathfrak{p}'}{1+\alpha\vartheta'}\cdot\frac{1+\alpha\vartheta}{\mathfrak{p}};\quad V''_1 = \frac{V''\mathfrak{p}''}{1+\alpha\vartheta''}\cdot\frac{1+\alpha\vartheta}{\mathfrak{p}};$$

$$V'''_1 = \frac{V'''\mathfrak{p}'''}{1+\alpha\vartheta'''}\cdot\frac{1+\alpha\vartheta}{\mathfrak{p}};\ \text{ꝛc.}$$

Denkt man sich jetzt die sämmtlichen Gase in übereinanderliegenden Schichten vereinigt, wobei jedes Gas sein Volum behält, so ist die Summe der einzelnen Volume das gesuchte Volum; also

$$V = \frac{1+\alpha\vartheta}{\mathfrak{p}}\left(\frac{V'\mathfrak{p}'}{1+\alpha\vartheta'}+\frac{V''\mathfrak{p}''}{1+\alpha\vartheta''}+\frac{V'''\mathfrak{p}'''}{1+\alpha\vartheta'''}+\dots\right). \quad [121]$$

Für den besondern Fall, daß die ursprünglichen Temperaturen alle der letzten Temperatur ϑ gleich sind, gibt diese Formel

$$V\mathfrak{p} = V'\mathfrak{p}' + V''\mathfrak{p}'' + V'''\mathfrak{p}''' + \dots \quad [122]$$

Wären überdieß die ursprünglichen Volume V', V'', V''' ... sämmtlich unter sich gleich, und sollte das Volum V des Gemenges ebensogroß werden, so hätte man

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'' + \mathfrak{P}''' + \ldots,$$

d. h.: Vereinigt man verschiedene Gase von gleichem Volum und gleicher Temperatur so, daß sie zusammen nur ein Volum einnehmen gleich dem Volum jedes einzelnen Gases vor der Vereinigung, so ist zuletzt die Pressung im Gemenge die Summe der ursprünglichen Pressungen.

437. Die Erfahrung bestätigt die vorstehenden Formeln, und lehrt zugleich zwei wichtige Thatsachen kennen; nämlich

1) Gase oder Dämpfe, welche in Berührung kommen, mischen sich in der Art, daß sie nach Verfluß eines hinlänglichen Zeitraums eine homogene elastische Flüssigkeit bilden.

2) Die obigen Formeln lassen sich auf ein Gemenge von Gasen und Dämpfen nur unter der Bedingung anwenden, daß das Gemenge nicht mehr Dampf enthält, als in demselben Raume und bei derselben Temperatur existiren könnte wenn der Dampf unvermengt wäre (432). Diese Bedingung hat nichts Befremdliches; denn man würde schwer begreifen, wie die Anwesenheit eines Gases dem Dampfe erlauben sollte, seine Sättigungsgrenze zu überschreiten. Merkwürdig aber ist, daß die Dazwischenkunft des Gases die Dampfmenge, welche zur Sättigung erfordert wird, nicht vermindert, obgleich das Gas die Pressung des Gemenges vermehrt, und zwar um eine Größe gleich der Pressung welche stattfände, wenn das Gas in dem nämlichen Raume allein vorhanden wäre. Ist also ein Gas in Berührung mit einer tropfbaren Flüssigkeit, so bildet sich all' der Dampf den der Raum und der aus der vorhandenen Temperatur folgende Sättigungsgrad verträgt; und die Pressung wächst um diejenige Größe welche diesem Zustande der Sättigung entspricht. Nur geht die Dampfbildung langsamer vor sich als es im leeren Raume der Fall sein würde.

Es mögen nun einige Anwendungen der im Vorstehenden entwickelten Gesetze folgen.

438. Aufgaben.

I. Eine gewisse Quantität Gas nimmt im trockenen Zustande unter der Pressung $\mathfrak{P}$ und bei der Temperatur ϑ das Volum V ein. Welches Volum V' wird das Gas unter derselben Pressung einnehmen, wenn es mit einer tropfbaren Flüssigkeit in Berührung steht, für dessen Dampf bei jener Temperatur ϑ das Pressungs-Maximum p ist?

Die Formel [122] gibt unmittelbar

$$V'\mathfrak{P}' = V\mathfrak{P} + V'p, \qquad \text{woraus} \qquad V' = \frac{V\mathfrak{P}}{\mathfrak{P} - p};$$

d. h. das Gas dehnt sich so aus, wie wenn es im trockenen Zustande blos die Pressung $\mathfrak{P} - p$ erlitte.

II. Ein Gas erfüllt das Volum V' unter der Pressung $\mathfrak{P}$ und der Temperatur ϑ, wenn es mit einem Dampfe gesättigt ist, dessen Pressung bei dieser Temperatur den Werth p hat. Man fragt nach dem Volum V, das dieses Gas bei der nämlichen Pressung und Temperatur im trockenen Zustande einnehmen würde.

Die vorige Gleichung liefert

$$V = \frac{V'(\mathfrak{P} - p)}{\mathfrak{P}},$$

wie wenn das Gas von der Pressung $\mathfrak{P} - p$ zur Pressung $\mathfrak{P}$ (beidemale trocken) übergienge.

III. Welches Gewicht hat der Kubikmeter eines gesättigten Gemenges aus einem Gase und einem Dampfe, deren tabellarische Dichtigkeiten δ und δ' sind, unter der Pressung $\mathfrak{P}$ und bei der Temperatur ϑ, für welche die Sättigungspressung des Dampfes p ist?

Das Gewicht (auf die Volum-Einheit) des Gases in dem Gemenge ist das nämliche wie wenn das Gas trocken die Pressung $\mathfrak{P} - p$ erlitte, d. h. [119]

$$1{,}300\,\frac{\mathfrak{P} - p}{p_a}\cdot\frac{\delta}{1 + \alpha\vartheta}.$$

Das Gewicht des Dampfes entspricht der Pressung p und der Temperatur ϑ, und ist also

$$1{,}300\,\frac{p}{p_a}\cdot\frac{\delta'}{1 + \alpha\vartheta}.$$

Das Gewicht auf den Kubikmeter des Gemenges ist die Summe der beiden vorigen Gewichte; nämlich

$$\frac{1{,}300}{1 + \alpha\vartheta}\left(\frac{\mathfrak{P} - p}{p_a}\,\delta + \frac{p}{p_a}\,\delta'\right).$$

Handelt sich's z. B. um Luft und Wasserdampf, so hat man $\delta = 1$ und $\delta' = \frac{5}{8}$; und obiger Ausdruck reducirt sich auf

$$\frac{1{,}300}{1 + \alpha\vartheta}\cdot\frac{\mathfrak{P}}{p_a}\left(1 - \frac{3}{8}\,\frac{p}{\mathfrak{P}}\right).$$

IV. Ein Gas über einer tropfbaren Flüssigkeit nimmt bei der Temperatur ϑ und der Pressung $\mathfrak{P}$ das Volum V ein. Wie groß ist sein Volum V′ bei der Temperatur ϑ' und der Pressung $\mathfrak{P}'$? Die Pressungen $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ des von jener Flüssigkeit erzeugten Dampfes für die beiden Sättigungszustände, welche den Temperaturen ϑ, ϑ' entsprechen, werden dabei als bekannt vorausgesetzt.

Das Volum V′ wird das nämliche sein, wie wenn das Gas in trockenem Zustande von der Pressung $\mathfrak{P} - \mathfrak{p}$ auf die Pressung $\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}'$ übergienge, bei gleichzeitigem Uebergange der Temperatur von ϑ in ϑ'. Man hat daher [117], indem das absolute Gewicht des Gases sich nicht ändert,

$$\frac{V'}{V} = \frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{p}}{\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}'} \cdot \frac{1 + \alpha\vartheta'}{1 + \alpha\vartheta}. \qquad [123]$$

Hier bietet sich die Frage dar: Ist beim zweiten Zustande mehr Dampf (d. h. ein größeres Gewicht des Dampfes) vorhanden als beim ersten?

Die Gewichte Π', Π auf den Kubikmeter Dampf in beiden Zuständen sind dieselben wie wenn der Dampf ohne Beimengung bei den Temperaturen ϑ', ϑ den entsprechenden Sättigungspressungen unterworfen wäre. Man hat daher [116]

$$\frac{\Pi'}{\Pi} = \frac{\mathfrak{p}'}{\mathfrak{p}} \cdot \frac{1 + \alpha\vartheta}{1 + \alpha\vartheta'}.$$

Wird diese Gleichung mit der vorhergehenden multiplicirt, so ergibt sich das Verhältniß der absoluten Dampfgewichte:

$$\frac{\Pi' V'}{\Pi V} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}\mathfrak{p}'}{\mathfrak{P}'\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{p}'}.$$

Also ist das zweite Dampfgewicht $\Pi'V'$ kleiner, gleich oder größer als das erste ΠV, jenachdem $\mathfrak{P}\mathfrak{p}'$ kleiner, gleich oder größer als $\mathfrak{P}'\mathfrak{p}$ ist. Im ersten dieser drei Fälle wird der Wechsel der Pressung und Temperatur einen Theil des Dampfes in tropfbare Flüssigkeit überführen; im zweiten Falle erfährt der Dampf weder eine Zunahme noch eine Abnahme; im dritten Falle kann die Formel nur dann zur Anwendung kommen, wenn mit dem Gemenge vor seinem Uebergang in den zweiten Zustand eine zureichende Quantität Flüssigkeit in Berührung ist. Würde diese Flüssigkeit ganz fehlen, so hätte man sich [117] der folgenden Formel zu bedienen:

$$\frac{V'}{V} = \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{P}'} \cdot \frac{1 + \alpha\vartheta'}{1 + \alpha\vartheta}.$$

V. Ein Gas über einer tropfbaren Flüssigkeit nahm bei der Temperatur ϑ und unter der Pressung $\mathfrak{P}$ ein gewisses Volum ein; die Temperatur

geht in ϑ' über, während das Volum das vorige bleibt; wie groß ist dann die Pressung $\mathfrak{P}'$?

Man braucht blos in der Formel [123] $V = V'$ zu setzen, um zu erhalten

$$\mathfrak{P}' = (\mathfrak{P} - \mathfrak{p})\,\frac{1 + \alpha\vartheta'}{1 + \alpha\vartheta} + \mathfrak{p}'.$$

Dieser Ausdruck hätte sich auch unmittelbar aus der Bemerkung ergeben, daß die gesuchte Pressung $\mathfrak{P}'$ sich aus zwei Bestandtheilen zusammensetzt, von denen der eine $\mathfrak{p}'$ vom Dampfe herrührt, der andere vom Gas, welches bei der Temperatur ϑ die Pressung $\mathfrak{P} - \mathfrak{p}$ erfährt.

VI. Eine verticale cylindrische Röhre AB (Fig. 65), an beiden Enden offen, ist mit dem untern Ende in eine tropfbare Flüssigkeit getaucht, welche um die Röhre her die atmosphärische Pressung erleidet. Im Innern der Röhre kann sich ein Kolben C bewegen. Bei einer gewissen Stellung dieses Kolbens steht die Flüssigkeit innerhalb der Röhre in demselben Niveau D wie außerhalb, wodurch angezeigt wird, daß die Pressung der mit gesättigtem Wasserdampfe gemengten Luft im Raume CD gleich der außen stattfindenden atmosphärischen Pressung ist. Nimmt man nun an, der Kolben begebe sich in eine neue, höhere Stellung C', so fragt sich's, zu welchem Niveau D' die Flüssigkeit in der Röhre emporsteigen muß, wenn das äußere Niveau D sich constant erhält.

Bedeuten V, V' die Volume CD, C'D' im Innern der Röhre, $\mathfrak{P}$ die äußere Pressung, $\mathfrak{P}'$ die innere Pressung bei der zweiten Stellung des Kolbens, so läßt sich die Formel [123] dadurch auf den vorliegenden Fall anwendbar machen, daß man $\vartheta = \vartheta'$ und $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$ setzt, wobei letztere Pressung $\mathfrak{p}$ die Sättigungspressung des Dampfes für die Temperatur der Flüssigkeit und der Röhre ist. Man hat also

$$V'(\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}) = V(\mathfrak{P} - \mathfrak{p}),$$

oder, wenn $CD = h$, $C'D' = h'$, $DD' = x$ gesetzt wird:

$$(h' - x)(\mathfrak{P}' - \mathfrak{p}) = h(\mathfrak{P} - \mathfrak{p}).$$

Ferner hat man [114], wenn Π das Gewicht eines Kubikmeters der Flüssigkeit ist:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}' + \Pi x.$$

Diese beiden Gleichungen, welche nur zwei Unbekannte $\mathfrak{P}'$ und x enthalten, liefern die Lösung der Aufgabe.

Die dieser Auflösung zu Grunde liegenden Betrachtungen erklären das Aufsteigen einer Flüssigkeit in einer Röhre, aus welcher man die Luft mit dem Munde saugt, indem dieses Aufsaugen durch eine vorübergehende Erweiterung der Brusthöhle zu Stande gebracht wird. Es ist klar, daß bei der

ganzen Erscheinung von keinerlei Anziehung die Rede sein kann; und daß kein Aufsteigen erfolgen würde wenn das Gefäß, in welches die Röhre eintaucht, ganz mit Flüssigkeit erfüllt und ohne Communication mit der äußern Luft wäre.

439. Piezometer mit comprimirter Luft. — Ist die Pressung einer luftförmigen Flüssigkeit so stark, daß ihre Messung mittels eines Piezometers in freier Luft (421) eine Röhre von allzugroßer Höhe erfordern würde, so bedient man sich einer am obern Ende geschlossenen Röhre, erfüllt mit einem Gase, welches sein Volum vermindert indem es zusammengedrückt wird. Fig. 66 zeigt die Anordnung dieses Apparats, den man gewöhnlich Manometer mit comprimirter Luft nennt. Der zu messende Druck wirkt auf die Oberfläche AB des Quecksilbers, welches sich in der Röhre CD zu einer veränderlichen Höhe erhebt.

Im Augenblick der Beobachtung sei

p die unbekannte Pressung des Gases, das in dem Theile DE der Röhre eingeschlossen ist;

H die Höhe, oder vielmehr die Anzahl gleicher Volumtheile, die dieses Gas einnimmt; eine bekannte Größe;

ϑ die bekannte Temperatur des Quecksilbers und des Gases;

h die Höhe CE des Quecksilbers in der Röhre, oberhalb des Spiegels im Gefäße; in Bruchtheilen des Meters gemessen und bekannt.

Nimmt man an, das Gas sei trocken, oder setze wenigstens keine tropfbare Flüssigkeit ab, so steht [117] die Pressung p im geraden Verhältniß mit $1 + \alpha\vartheta$, und im umgekehrten Verhältniß mit der Höhe H, welche das Volum anzeigt. Man hat daher, wenn K eine von H und ϑ unabhängige Constante bedeutet:

$$p = K\frac{1+\alpha\vartheta}{H}.$$

Die gesuchte Pressung $\mathfrak{p}$ am Niveau des Gefäßes ist also (413 u. 419)

$$\mathfrak{p} = K\frac{1+\alpha\vartheta}{H} + \left(1 - \frac{\vartheta}{5550+\vartheta}\right)\frac{h}{0{,}76}\mathfrak{p}_0.$$

Zur Bestimmung von K hat man ein für allemal einen Versuch anzustellen, indem man das Gefäß in Communication mit der Atmosphäre setzt und im nämlichen Augenblick ein Barometer beobachtet. In diesem Falle sollen H′, h′, ϑ' das Volum des Gases, die Quecksilberhöhe im Apparat und die Temperatur bedeuten, h_1 aber die auf die Temperatur 0° reducirte Barometerhöhe (419). Dann ist

$$\mathfrak{p}_0\frac{h_1}{0{,}76} = K\frac{1+\alpha\vartheta'}{H} + \left(1 - \frac{\vartheta'}{5550+\vartheta'}\right)\frac{h}{0{,}76}\mathfrak{p}_0,$$

woraus sich der Werth von K ergibt, den man im vorstehenden, für die Pressung $\mathfrak{P}$ erhaltenen Ausdrucke zu substituiren hat. Das Verhältniß von $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{p}_a$ gibt den Ausdruck dieser Pressung in Atmosphären, d. h. in Beziehung auf den als Einheit geltenden mittlern atmosphärischen Druck auf den Quadratmeter (= 10334^{kg}).

Beispiel.

$\vartheta' = 10$; $H' = 0{,}46$; $h' = 0$; $h_1 = 0{,}76$.

$\vartheta = 30$; $H = 0{,}30$; $h = 0{,}16$; $\mathfrak{P} = 1^{atm.},85 = 19155^{kg}$.

§. 4. Gesammtdruck einer schweren, homogenen tropfbaren Flüssigkeit auf eine Ebene.

440. Es sei ω der Inhalt eines kleinen Stückchens einer Ebene, welche mit einer ruhenden (tropfbaren) Flüssigkeit in Berührung ist; h seine Tiefe unterhalb einer Horizontalebene NN, in welcher die Pressung der Flüssigkeit bekannt, nämlich $= \mathfrak{P}_0$ ist; Π das Gewicht eines Kubikmeters der Flüssigkeit. Der Druck auf das Flächenstückchen ω ist (413) $\omega\mathfrak{P}_0 + \omega\Pi h$; und da die Drücke auf sämmtliche Elemente der Ebene senkrecht zur Ebene sind, so ist ihre Resultante gleich ihrer Summe, nämlich

$$\mathfrak{P}_0\Sigma\omega + \Pi\Sigma\omega h.$$

Bezeichnet nun Ω den ganzen von der Flüssigkeit gedrückten Flächenraum $\Sigma\omega$, und H die Tiefe seines Schwerpuncts unter der Horizontalebene NN, so hat man $\Sigma\omega h = \Omega H$ (GL. 307), und der Gesammtausdruck wird

$$\Omega\,(\mathfrak{P}_0 + \Pi H).$$

$\Pi\Omega H$ ist das Gewicht eines senkrechten Prisma's aus der Flüssigkeit, welches Ω zur Basis und H zur Höhe hat.

441. Handelt sich's um den Druck einer homogenen Flüssigkeit deren Oberfläche in Berührung mit der Atmosphäre ist, so wird der Abstand H von dieser Oberfläche aus genommen, und die Pressung $\mathfrak{P}_0$ ist dann durch Beobachtung des Barometers bestimmt.

Ist die ebene Wand, welche von der einen Seite durch die Flüssigkeit gedrückt wird, auf ihrer entgegengesetzten, gleichen und parallelen Seite in Berührung mit der Atmosphäre, so beabsichtigt man gewöhnlich nur eine Berechnung des Unterschieds zwischen den Drücken auf die beiden Seiten; man betrachtet hiebei die atmosphärische Pressung auf die Oberfläche der Flüssigkeit und auf die Außenseite der Wand als gleich. Dieser Unterschied ist dann $\Pi\Omega H$, nämlich blos die Resultante aus den vom Gewicht der Flüssigkeit stammenden Drücken.

Bemerkenswerth ist, daß auf diesen Gesammtdruck die horizontalen Dimensionen und das Volum der Flüssigkeit keinen Einfluß haben.

442. Die Resultante $\Pi\Omega H$ der zur gedrückten Ebene senkrechten Kräfte trifft diese Ebene in einem Puncte, welcher der Mittelpunct des Drucks heißt. Dieser Punct liegt immer tiefer als der Schwerpunct des gedrückten Wandstückes, wenn letzteres nicht etwa eine horizontale Lage hat.

Bringt man nämlich in Gedanken diese (schräge oder verticale) Wand in horizontale Stellung, indem man sie um eine horizontale Axe dreht welche in der Wandfläche durch den Schwerpunct gezogen ist, so hat der Gesammtdruck keine Aenderung erlitten, da er stets $\Pi\Omega H$ ist; die Resultante aber geht dann durch den Schwerpunct, weil jetzt die Drücke auf gleiche Elemente der Ebene einander gleich sind. Führt man nun die Wand wieder in ihre erste Stellung zurück, so werden die partiellen Drücke auf den obern Theil der Wand, sowie ihre Momente in Beziehung auf die Drehungsaxe, kleiner; für den untern Theil der Wand gilt das Gegentheil. Die Momentensummen auf beiden Seiten der Axe, welche vorhin einander gleich waren, sind also ungleich geworden; die dem obern Theile entsprechende Summe ist kleiner als die andere, und die Resultante muß also unter der Axe vorbeigehen.

443. Die Lage für den Mittelpunct des Drucks einer Flüssigkeit auf eine ebene Wand findet man durch Rechnung, indem man die Theorie der Zusammensetzung paralleler Kräfte benützt. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer homogenen Flüssigkeit.

In Fig. 67, deren Ebene vertical und zur gedrückten Wand senkrecht zu denken ist, stellt NN die horizontale Ebene vor in welcher die Pressung der Flüssigkeit als null betrachtet wird.

AB sei die verticale Projection oder Spur der Wand; I der Schnitt ihrer erweiterten Ebene mit der Niveau-Ebene NN; C der Mittelpunct des Drucks, dessen Entfernung AC von der in A projicirten horizontalen Axe verlangt wird. Die Fläche AB zerlegen wir in unendlich schmale horizontale Streifen, deren einer sich in MM_1 projicirt. Es bezeichne z die verticale Distanz Mm; x die Distanz AM; dx also die Breite des Streifens MM; y die Länge dieses Streifens, in horizontalem Sinne, senkrecht zur Ebene der Figur. Der Druck auf die Fläche ydx ist $\Pi zydx$; sein Moment bezüglich der Axe A ist $\Pi zyxdx$. Bedeutet also x′ die Distanz AC, und nimmt man die Momente der Drücke in Beziehung zur Axe A, so gilt die Gleichung

$$x'\int \Pi zydx = \int \Pi zyxdx, \qquad \text{woraus folgt} \qquad x' = \frac{\int zyxdx}{\int zydx}.$$

Bezeichnet man die Distanz AI durch c und den Winkel NIA durch α, so ist $z = (c + x) \sin \alpha$, und die vorstehende Formel geht, nach Weglassung des constanten Factors $\sin \alpha$, über in

$$x' = \frac{\int (cx + x^2)\, y dx}{\int (c + x)\, y dx}. \qquad [124]$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, für y seinen Ausdruck als Function von x zu substituiren, und die Integration innerhalb der Grenzen der gedrückten Fläche auszuführen.

Diese Fläche sei z. B. ein Trapez mit horizontalen Basen. Ist a die Basis welche sich in A projicirt, b die in B projicirte Basis, l die Höhe AB des Trapezes, so hat man (GL. 92)

$$y = a + \frac{b - a}{l} x.$$

Nach Substitution dieses Ausdrucks in der für x' erhaltenen Formel findet man durch Ausführung der Integrationen von $x = 0$ bis $x = l$:

$$x' = \frac{l^2 (a + 3b) + 2lc (a + 2b)}{2l (a + 2b) + 6c (a + b)}. \qquad [125]$$

Liegt die obere Basis A im Flüssigkeitsspiegel, so ist $c = 0$, und man hat

$$x' = \frac{l (a + 3b)}{2 (a + 2b)}. \qquad [126]$$

Ist die Wandfläche ein Dreieck dessen Basis in dem Spiegel der Flüssigkeit liegt, so muß $c = 0$ und $b = 0$ gesetzt werden; also

$$x' = \frac{l}{2}. \qquad [127]$$

Für ein Dreieck, dessen Spitze in den Spiegel fällt, ist $c = 0$ und $a = 0$; demnach

$$x' = \tfrac{3}{4} l. \qquad [128]$$

Ist die Wand ein Parallelogramm mit zwei horizontalen Seiten, so hat man in der Formel [125] $a = b$ zu nehmen, wodurch sich ergibt

$$x' = \frac{2l^2 + 3cl}{3 (l + 2c)}. \qquad [129]$$

Liegt endlich in diesem letztern Falle die obere horizontale Seite im Flüssigkeitsspiegel, so ist $c = 0$ und

$$x' = \tfrac{2}{3} l. \qquad [130]$$

444. Das Aufsuchen des Mittelpuncts für den Druck einer Flüssigkeit auf eine ebene Wand läßt sich auf die Bestimmung des Schwerpuncts für ein Volum zurückführen.

Der Druck auf den Streifen MM_1 ist, der Intensität nach, gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitsschicht $MM_1 m'_1 m'$, welche zur Basis das in Mm' projicirte Rechteck $= yz$, und zur Dicke die unendlich kleine Strecke $MM_1 = dx$ hat. Dehnt man diese Bemerkung auf sämmtliche Elementarstreifen der ganzen Wand AB aus, so ergibt sich Folgendes.

1) Der Gesammtdruck, d. i. die Summe der Drücke auf die Elemente dieser Wand, ist gleich dem Gewicht des schiefabgeschnittenen, geraden Prisma's oder Cylinders ABb'a', dessen untere Basis die Wand AB ist, und dessen obere, schräge Basis in der (zur Ebene der Figur senkrechten) Ebene a'b' liegt, welche man findet, wenn man die Linien Aa', Bb' senkrecht auf der Wand errichtet und den Verticalen Aa, Bb gleichmacht; woraus zugleich folgt, daß irgend eine zur Wand Senkrechte Mm' der entsprechenden Verticalen Mm gleich ist, und daß die Ebene a'b' durch I geht.

2) Die Resultante jener Druckelemente geht durch den Schwerpunct G' des erwähnten abgeschnittenen Cylinders oder Prisma's; und folglich ist der Mittelpunct C des Drucks die rechtwinkelige Projection dieses Schwerpuncts G' auf die Wand.

Der Mittelpunct C des Drucks liegt auch, wie man leicht sieht, auf der Verticalen durch den Schwerpunct G des abgeschrägten Prisma's oder Cylinders mit verticalen Seitenlinien, AabB, dessen eine Basis die Wand AB ist, und dessen obere Basis dem Flüssigkeitsspiegel NI angehört.

Mittels dieser Betrachtung findet man unmittelbar die vier Formeln [127] bis [130] wieder; und in dem Falle, wo AB ein Parallelogramm ist, kann man den Mittelpunct des Drucks auch auf graphischem Wege erhalten, indem man bemerkt, daß die Projectionen der Schwerpuncte G', G auf die Ebene der Figur 67 mit den Schwerpuncten der Trapeze ABb'a', ABba zusammenfallen.

445. Werden die beiden Seiten einer Zwischenwand von zwei getrennten Abtheilungen einer und derselben Flüssigkeit gedrückt, deren Oberflächen in Berührung mit der Atmosphäre sind, aber verschiedenes Niveau haben, so ist der Unterschied zusammengehöriger Pressungen auf beiden Seitenflächen der Zwischenwand constant; er ist nämlich gleich dem Gewichte Π eines Kubikmeters der Flüssigkeit, multiplicirt mit dem Niveau-Unterschied, wenn man absieht von der unbedeutenden Verschiedenheit der atmosphärischen Pressung auf beiden Flüssigkeitsspiegeln.

§. 5. Druck irgend einer Flüssigkeit auf eine krumme Oberfläche.

446. Lehrsatz. Der Druck $\mathfrak{P}\omega$ einer (tropfbaren oder gasförmigen) Flüssigkeit auf irgend ein Flächenelement, dessen Inhalt ω ist, hat zur Projection auf eine beliebige Axe Ox eine Kraft gleich dem Drucke $\mathfrak{P}\omega'$, den am nämlichen Puncte ein Element auszuhalten hätte, welches der orthogonalen Projection ω' des Flächenelements ω auf eine zur Axe Ox senkrechte Ebene yOz gleich wäre.

Denn ist α der Winkel, den die Normale am Element ω mit der Axe Ox bildet, so ist $\mathfrak{P}\omega \cos\alpha$ die Projection des Druckes $\mathfrak{P}\omega$; es ist aber auch $\omega \cos\alpha = \omega'$, weil α zugleich den Winkel des Elements ω gegen die Ebene yOz ausdrückt (GL. 329, Anm.).

Dieser Satz könnte auf eine andere Art, welche der Beweisführung in Nr. 411 ähnlich ist, unmittelbar bewiesen werden, indem man das Gleichgewicht eines kleinen abgeschrägten Cylinders betrachtet, dessen nah beisammengelegene Basen den Elementen ω und ω' gleich sind, während seine Seitenlinien parallel zu Ox liegen.

447. Zusatz I. Legt sich an eine krumme Fläche eine Flüssigkeit mit überall gleicher Pressung an (was man bei einer Gasmenge von geringem Umfang gelten lassen kann), und werden die von der Fläche aufgenommenen Elementardrücke auf eine Axe Ox projicirt, so ist die algebraische Summe dieser Projectionen gleich dem Drucke, den die nämliche Flüssigkeit auf eine von ihr berührte ebene Fläche ausüben würde, deren Inhalt der Projection der krummen Fläche auf eine zu Ox senkrechte Ebene yOz gleich ist. Dabei ist aber zu bemerken, daß, wenn die Parallelen zur Axe Ox die gedrückte krumme Fläche zweimal schneiden, die Projectionen der auf zusammengehörige Schnittpuncte treffenden Drücke, sowie die Projectionswerthe der an solchen Puncten liegenden Flächenelemente, sich gegenseitig aufheben.

So ist z. B. die Resultante der Drücke auf einen Kugelabschnitt (204) gleich dem Drucke den seine ebene Basis zu erleiden hätte, selbst dann, wenn der Abschnitt die Halbkugel überschreitet. Die Resultante der Drücke auf ein zwischen zwei Seitenlinien enthaltenes Stück eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Basis ist gleich dem Drucke, den das Rechteck zwischen den begrenzenden Seitenlinien erfahren würde, selbst dann wenn jenes Stück mehr als die Hälfte der Cylinderoberfläche ausmacht.

448. Zusatz II. Berücksichtigt man die Wirkung der Schwere auf die tropfbare oder gasige Flüssigkeit, welche gegen ein Stück der krummen Fläche drückt, so besteht die vorige Eigenschaft noch für den Fall fort, in welchem die Axe Ox horizontal ist.

449. Zusatz III. Bei der nämlichen Annahme einer *schweren*, tropfbaren oder gasigen Flüssigkeit hat der Normaldruck auf ein beliebiges Element der Fläche zur Verticalprojection eine Kraft gleich dem Gewichte des verticalen abgeschrägten Flüssigkeitscylinders, dessen untere Basis jenes Element ist und dessen obere Basis im Flüssigkeitsspiegel liegt, in welchem die Pressung null ist; wobei übrigens dieser Cylinder aus Horizontalschichten zusammengesetzt ist, homogen mit denen aus welchen die schwere Flüssigkeit besteht.

450. Aus diesen Betrachtungen erklärt sich leicht das sogenannte *hydrostatische Paradoxon*, daß der Druck einer Flüssigkeit auf den Boden eines nicht cylindrischen Gefäßes bald größer, bald kleiner ist als das Gewicht der im Gefäße enthaltenen Flüssigkeit.

§. 6. Gleichgewicht eingetauchter oder schwimmender Körper.

451. Ist ein Körper ganz oder zum Theil in eine schwere tropfbare Flüssigkeit eingetaucht, welche sich in Ruhe befindet und den eingesenkten Theil völlig umfängt, so haben die von der Flüssigkeit auf die Oberfläche des Körpers geübten Normaldrücke eine einzige Resultante; diese geht durch den Schwerpunct der aus ihrer Stelle gedrängten Flüssigkeit, und ist gleich, aber entgegengesetzt, dem Gewichte derselben. Es folgt dieß aus Nr. 448 und Nr. 449, läßt sich aber auch unmittelbar einsehen; denn hinsichtlich der Drücke würde sich nichts ändern, wenn der eingetauchte Körper durch die von ihm verdrängte Flüssigkeit ersetzt würde, und dann wäre der Satz eine Folge aus den Grundlehren der Statik. Wohl zu merken ist, daß die umgebende Flüssigkeit mit der ganzen Oberfläche in Berührung steht, welche den Körper unterhalb des Flüssigkeitsspiegels begrenzt. Uebrigens kann diese Flüssigkeit aus Horizontalschichten von verschiedener Dichtigkeit bestehen; um dann aber das Gewicht und den Schwerpunct der verdrängten Flüssigkeit zu erhalten, muß man jede solche Schicht durch den jetzt vom Körper eingenommenen Raum fortgesetzt denken.

Die Resultante aus den Drücken der Flüssigkeit auf den in sie getauchten Körper nennt man ungeeigneterweise den *Gewichtsverlust durch Eintauchung*; ein passenderer Name ist *Auftrieb*.

Da die horizontalen Composanten der Elementardrücke für sich im Gleichgewicht stehen (448), so wird die Resultante aller dieser Drücke sich auf die Resultante der verticalen Composanten reduciren, d. h. auf eine Resultante paralleler Kräfte. Aus diesem Grunde kann man den Schwerpunct der vom eingetauchten Körper verdrängten Flüssigkeit den *Mittelpunct der Drücke* nennen, welche dieser Körper erleidet.

452. Aus dem vorhin festgestellten Satze folgt unmittelbar, daß für das Gleichgewicht eines Körpers, der in einer homogenen Flüssigkeit ganz untergetaucht ist, nachstehende Bedingungen zu erfüllen sind:

1) Sein Gewicht muß gleich dem Gewichte eines gleichen Volums der Flüssigkeit sein;

2) der Schwerpunct des Körpers und der Schwerpunct seines Volums müssen auf einerlei Verticalen liegen.

In Betreff der zweiten Bedingung ist eine wesentliche Unterscheidung zu treffen. Wenn der Schwerpunct G des festen Körpers (Fig. 68a) tiefer liegt als der Mittelpunct C des Drucks, so ist das Gleichgewicht stabil; d. h. wenn aus irgend einer Ursache der Körper sich geneigt hat (Fig. 68b) und dann ohne Anfangsgeschwindigkeit der Schwere und den Drücken der umgebenden Flüssigkeit überlassen wird, so streben diese Kräfte, ihn wieder in die vorige Gleichgewichtslage zurückzuführen. In der That wird sich, da der Körper starr ist, nichts an seiner Bewegung ändern, wenn man die auf ihn einwirkenden Kräfte durch ihre Resultanten ersetzt (402), nämlich durch die am Schwerpunct G angebrachte Kraft P welche sein Gewicht darstellt, und durch die vertical aufwärts gerichtete Kraft R, gleich P, aber am Puncte C angebracht; da die Translationsresultante dieser beiden Kräfte null ist, so bleibt der Schwerpunct G unbeweglich (283), aber wegen der Kraft R dreht sich (408) der Körper um diesen Punct G, und zwar gegen die Stellung hin wo C vertical über G zu liegen kommt.

Hat dagegen der Druckmittelpunct C eine tiefere Lage als der Schwerpunct G, so ist das Gleichgewicht labil; d. h., wenn der Körper auch noch so wenig sich neigt (was in der Wirklichkeit unvermeidlich ist) und dann blos den Kräften P und R überlassen bleibt (Fig. 68c), so dreht er sich in solchem Sinne, daß er mehr und mehr von der ursprünglichen Gleichgewichtslage abweicht und zuletzt in die entgegengesetzte Stellung (in die Lage des stabilen Gleichgewichts) umschlägt.

453. Damit ein schwimmender, d. h. nicht vollständig untergetauchter Körper im Gleichgewicht sei, ist nothwendig 1) daß sein Gewicht dem der verdrängten Flüssigkeit gleich kommt; 2) daß der Schwerpunct des Körpers und der Mittelpunct des Drucks auf einer Verticale liegen. Das Gleichgewicht ist auch hier stabil, wenn der Schwerpunct unter den Mittelpunct des Drucks fällt; aber diese stets hinreichende Bedingung ist nicht durchaus nothwendig. Ein einfaches Beispiel möge dieß beweisen.

Es sei ABCD (Fig. 69) ein fester Körper, begrenzt von der Oberfläche eines Drehungscylinders mit horizontaler Axe. Dieser Körper ist in eine Flüssigkeit eingesenkt, deren freie Oberfläche (Spiegel) die Lage AC hat. Ein bei B eingesetzter Ballast macht, daß der Schwerpunct G des Körpers tiefer

liegt als die Axe O. Der Schwerpunct für das Volum der verdrängten Flüssigkeit, und mithin der Mittelpunct des Drucks, ist in G′. Bei der Gleichgewichtslage (Fig. 69a) ist das Gewicht des festen Körpers gleich dem der verdrängten Flüssigkeit, und die beiden Schwerpuncte G, G′ liegen auf einer und derselben Verticalen, welche die Axe O schneidet. Wird nun der Körper durch eine geringe Kraft so geneigt, daß er sich dabei nicht tiefer einsenkt, so nimmt die anfangs verticale Gerade BD eine schiefe Lage an (Fig. 69b), enthält aber immer den Schwerpunct G des schwimmenden Körpers, während der Schwerpunct G_1' der verdrängten Flüssigkeit auf einer die Axe O schneidenden Verticalen liegt.

In diesem Zustande ist der Körper zweien Kraftsystemen ausgesetzt; die Kräfte des ersten Systems machen das Gewicht des Körpers aus, und haben eine verticale, durch G gehende Resultante, welche von oben nach unten gerichtet ist; die Kräfte des zweiten Systems sind die Drücke der Flüssigkeit, und haben ebenfalls eine verticale Resultante, welche aber von unten nach oben durch G_1' geht. Hieraus folgt, daß der schwimmende Körper sich zu drehen sucht und in seine erste Lage zurückkehren will. Damit diese Rückkehr erfolge, ist, wie man leicht sieht, blos erforderlich, daß der Punct G tiefer als die Axe O, wenn auch höher als G′, liege. Fällt überdieß G unter G′, so wird der Körper nur um so schneller in seine Gleichgewichtslage zurückkommen.

454. Wir betrachten nun einen geraden Cylinder mit beliebig gestalteter Basis (Fig. 70), welcher in solcher Lage schwimmt daß seine Seitenlinien horizontal sind. Dreht man diesen Cylinder so, daß nicht blos die vorige Bedingung fortbesteht, sondern zugleich auch die Menge der verdrängten Flüssigkeit die nämliche bleibt, wenngleich ihr Volum die Form ändert, so beschreibt der Schwerpunct G′ dieses Volums eine Curve $G'G'_1$, welche kein Kreisbogen mehr ist, wie im vorigen Falle, aber die merkwürdige Eigenschaft besitzt, daß ihre horizontale Tangente bei jeder Stellung des schwimmenden Körpers die jeweilige Lage des Schwerpuncts der verdrängten Flüssigkeit zum Berührungspunct hat. Ist nämlich für eine Stellung des Körpers, bei welcher jener Schwerpunct in G′ liegt, AB die Benetzungsgrenze (d. h. der Schnitt des Körpers durch die Ebene des Flüssigkeitsspiegels), und will man nun einen benachbarten Punct der Curve haben, so ist eine andere Benetzungsgrenze A_1B_1 zu betrachten, welche so liegen muß daß der Flächenraum A_1DB_1 dem Raume ADB, und mithin auch der Raum BCB_1 dem Raume ACA_1 gleich ist. Nun liegt nothwendig der Schwerpunct G'_1 von A_1DB_1 oberhalb der Geraden G′H, welche zu AB parallel und also bei der vorigen Lage des Körpers horizontal ist; und dieser Schluß gilt immer, mag G'_1 rechts oder links von G′ fallen. Folglich ist G′H die Tangente

in G', und die Verticale G'V stellt die Normale in diesem Puncte der Curve $G'G'_1$ dar.

Man denke sich jetzt in der Nähe des Puncts G', welcher der Gleichgewichtslage des schwimmenden Körpers entsprechen soll, ein Stück der Curve $G'G'_1$ gezeichnet, und es sei M der Krümmungsmittelpunct der Curve für ebendiesen Punct G' (GL. 260). Dieser Krümmungsmittelpunct M heißt das Metacentrum des schwimmenden Körpers, und spielt hier eine ähnliche Rolle wie der Kreismittelpunct O bei dem in der vorigen Nummer betrachteten Umdrehungscylinder. In der That muß bei der Gleichgewichtslage (Fig. 70a) die Verticale G'M den Schwerpunct G des schwimmenden Körpers enthalten; und wenn der Körper unendlich wenig geneigt wird, z. B. nach rechts (Fig. 70b), so schneidet die durch den neuen Druckmittelpunct G'_1 gehende Verticale die vorige unendlich nahe an M; damit nun der Körper in seine Gleichgewichtslage zurückstrebe, ist hinreichend (wie die Figur 70b zeigt), daß der Schwerpunct G tiefer als das Metacentrum M liegt, ohne daß er nothwendig unterhalb des Druckmittelpuncts G' fallen müßte.

455. Anmerkung. Die in diesem § aufgeführten Eigenschaften werden nur dann wirklich stattfinden, wenn die Fläche, welche den Körper unterhalb der Benetzungsebene begrenzt, ganz und gar in Berührung mit der betrachteten Flüssigkeit steht. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so sind die auf die Drücke bezüglichen Aufgaben nach den Lehrsätzen der §§. 4 u. 5 zu behandeln. (Diese Bemerkung ist zu beachten bei Ventilen, welche diesseits und jenseits mit Flüssigkeiten von verschiedener Pressung communiciren; oder bei eingetauchten glockenartigen Körpern, in denen Luft durch das eindringende Wasser verdichtet ist.)

§. 7. Berechnung der Berghöhen nach Barometerbeobachtungen.

456. Ist die Atmosphäre in relativer Ruhe gegen die Erde, so übt sie an einem bestimmten Orte auf eine Fläche von einem Quadratmeter einen Druck, gleich dem Gewichte einer verticalen Luftsäule, deren horizontaler Querschnitt einen Quadratmeter beträgt, und welche sich von der betrachteten Stelle aus bis zur obern Grenze der Atmosphäre erhebt; oder, um genauer zu reden, dieser Druck ist die Resultante aus der Gesammtanziehung der Erde auf die erwähnte Luftsäule, und den Centrifugalkräften, welche man sich an deren Elementen angebracht denken muß, damit sie im Gleichgewicht seien (269 u. 297). Die atmosphärische Pressung an einem Orte ist unmittelbar durch das Barometer bekannt; und es ist klar, daß, wenn man dasselbe an zwei in verschiedenen Höhen gelegenen Puncten beobachtet, der an der obern

Station gefundene Werth kleiner sein wird als der andere, und zwar um so kleiner je weiter man emporsteigt. Dieß hat auf den Gedanken geführt, das Barometer zur Auffindung des Höhenunterschieds zweier Beobachtungsorte zu benützen.

Wäre das Gewicht der Luft auf die Einheit des Volums constant, wie es bei einer Flüssigkeit von mäßiger Ausdehnung der Fall sein würde, und bedeutet Π dieses Gewicht, z den Niveau-Unterschied zweier Puncte der Atmosphäre, $\mathfrak{P}_0$ die Pressung am untern, $\mathfrak{P}_1$ die Pressung am obern Punct, h_0 und h_1 die entsprechenden auf die Temperatur 0^0 reducirten Barometerhöhen, $\Pi_{\mathfrak{Q}}$ das Gewicht der Volumeinheit Quecksilber bei dieser Temperatur, so hätte man (413 u. 419) die Relationen

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_1 + \Pi z, \qquad \mathfrak{P}_0 = \Pi_{\mathfrak{Q}} h_0, \qquad \mathfrak{P}_1 = \Pi_{\mathfrak{Q}} h_1,$$

und hieraus

$$z = \frac{\Pi_{\mathfrak{Q}}}{\Pi}(h_0 - h_1).$$

Setzt man für $\Pi_{\mathfrak{Q}}$ seinen Werth 13598^{kg}, und nimmt man z. B. für Π das Gewicht trockener Luft unter der mittlern atmosphärischen Pressung und bei der Temperatur 0^0, nämlich $1^{kg},300$, so würde man finden, daß jedem Millimeter der Differenz $(h_0 - h_1)$ zwischen den Barometerhöhen ein Niveau-Unterschied z von $10^m,46$ entspräche. Nimmt man $h_1 = 0$ und $h_0 = 0,76$, so gäbe die obige Formel als ganze Höhe der Atmosphäre $10460 \,.\, 0^m,76 = 7950^m$.

457. Allein die Hypothese, bei welcher wir so eben einen Augenblick verweilten, ist von der Wahrheit zu weit entfernt, als daß sie zu genügenden Näherungsresultaten führen könnte, außer wenn sich's um nur kleine Niveau-Unterschiede handelt. In jedem andern Falle muß auf die Aenderung Rücksicht genommen werden, welche die Dichtigkeit der Luft in Folge des Pressungs- und Temperaturwechsels erfährt; und so soll es nun auch geschehen. Wir vernachläßigen blos die Aenderung der Schwere, welche aus der Zunahme der Entfernung vom Mittelpunct der Erde und aus der vermehrten Centrifugalkraft erwächst; dieß ist erlaubt, wenn die Erhebungen über den Meeresspiegel nicht sehr beträchtlich sind, und zieht unter allen Umständen nur einen geringen Fehler nach sich.

Es sei M ein Punct der Atmosphäre, welcher um die Distanz z höher liegt als ein zum Höhenursprung angenommener Punct O. Die Pressung $\mathfrak{P}$ an diesem Puncte ist eine Function von z, um deren Bestimmung sich's handelt. Zu diesem Ende nehmen wir einen Punct M′ unendlich nahe über M an, und bezeichnen die verticale Distanz MM′ durch dz. Die Pressung in M′ ist $\mathfrak{P} + d\mathfrak{P}$, wobei das Differential $d\mathfrak{P}$ negativ ist. Da innerhalb dieses

kleinen Intervalls die Luft als homogen betrachtet werden darf, so hat man (413)

$$d\mathfrak{p} = -\Pi dz.$$

Dabei bedeutet nämlich Π das auf den Kubikmeter bezogene Gewicht der Luft in der Schicht MM′, oder am Puncte M, bis auf einen Unterschied welcher beim Uebergang auf die Grenze verschwindet. Nach der Formel [120] in Nr. 430 ist diese Größe eine Function der Pressung $\mathfrak{p}$, der Temperatur ϑ, und der tabellarischen Dichtigkeit des Gases, welch letztere veränderlich ist, je nach dem Wasserdampfgehalte der Atmosphäre am betrachteten Puncte. Zur Vereinfachung nehmen wir diese tabellarische Dichtigkeit constant an; da aber die Atmosphäre um so mehr Wasserdampf enthält, je höher ihre Temperatur ist (wodurch, unter übrigens gleichen Umständen, ihr Gewicht auf die Volumeinheit sich vermindert), so berücksichtigt man diesen Umstand in der Art, daß man den Ausdehnungscoefficienten α ein wenig größer nimmt, und ihn, nach Laplace, = 0,004 setzt.

Man kann somit, wenn k eine entsprechende Constante bezeichnet, anschreiben

$$\Pi = \frac{\mathfrak{p}}{k(1 + 0{,}004\vartheta)}.$$

und folglich

$$d\mathfrak{p} = -\frac{1}{k(1 + 0{,}004\vartheta)}\mathfrak{p}dz, \quad \text{oder} \quad dz = -k(1 + 0{,}004\vartheta)\frac{d\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}.$$

Um diese Gleichung integriren zu können, müßte das Gesetz bekannt sein, nach welchem sich die Temperatur ϑ entweder mit der Höhe z oder mit der Pressung ändert. In Ermangelung eines solchen Gesetzes substituirt man der veränderlichen Temperatur eine constante, nämlich das arithmetische Mittel aus den beiden Temperaturen ϑ_0 und ϑ_1, welche an den beiden Puncten herrschen, deren Niveau-Unterschied gefunden werden soll; d. h. man setzt $\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1)$. Wird hierauf integrirt, und bezeichnet man durch Z den gesuchten Niveau-Unterschied, durch $\mathfrak{p}_0$ die Pressung am untern Punct, durch $\mathfrak{p}_1$ die Pressung am obern Punct, so ergibt sich

$$Z = 2{,}3026\,k\left[1 + 0{,}002(\vartheta_0 + \vartheta_1)\right]\log\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{p}_1}. \qquad [131]$$

Unter Vernachläßigung der Aenderung der Schwere ist das Verhältniß $\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{p}_1}$ gleich dem Verhältniß der auf einerlei Temperatur reducirten Barometerhöhen (419). Sind also h_0, h_1 die Höhen des Barometers an

beiden Stationen, Θ_0, Θ_1 die Temperaturen des Quecksilbers im Zeitpuncte der Beobachtung, so hat man

$$\frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{p}_1} = \frac{h_0\,(5550 + \Theta_1)}{h_1\,(5550 + \Theta_0)}.$$

Es bleibt nun blos noch übrig, die Constante k in der Formel [131] zu bestimmen, und dieß kann mit großer Annäherung durch Rechnung geschehen. Wollte man trockene Luft von der Temperatur 0° voraussetzen, gewogen an der Oberfläche der Erde und unter der Breite von Paris, so hätte man

$$\Pi = 1{,}300 = \frac{10334}{k}, \quad \text{also } k = \frac{10334}{1{,}3}, \quad \text{und} \quad 2{,}3026\,k = 18304.$$

Ramond's trigonometrische und barometrische Beobachtungen im südlichen Frankreich haben jedoch erwiesen, daß für den Zahlencoefficienten der Formel [131] der Werth 18393 angenommen werden muß; und durch diese Vergrößerung der Zahl verbessert man die geringen Fehler der vorstehenden Theorie bis zur erwünschten Genauigkeit. Die Formel geht demnach über in

$$Z = 18393\,[1 + 0{,}002\,(\vartheta_0 + \vartheta_1)]\,\log \frac{h_0\,(5550 + \Theta_1)}{h_1\,(5550 + \Theta_0)}.$$

Druckfehler.

S. 28, Z. 9 v. o. l. **um** st. und.

„ 41, „ 9 v. o. soll das Comma **nach** statt **vor** dem Worte „projicirt“ stehen.

„ 63, „ 10 u. 11 v. o. sollte 𝔐 statt M gesetzt sein.

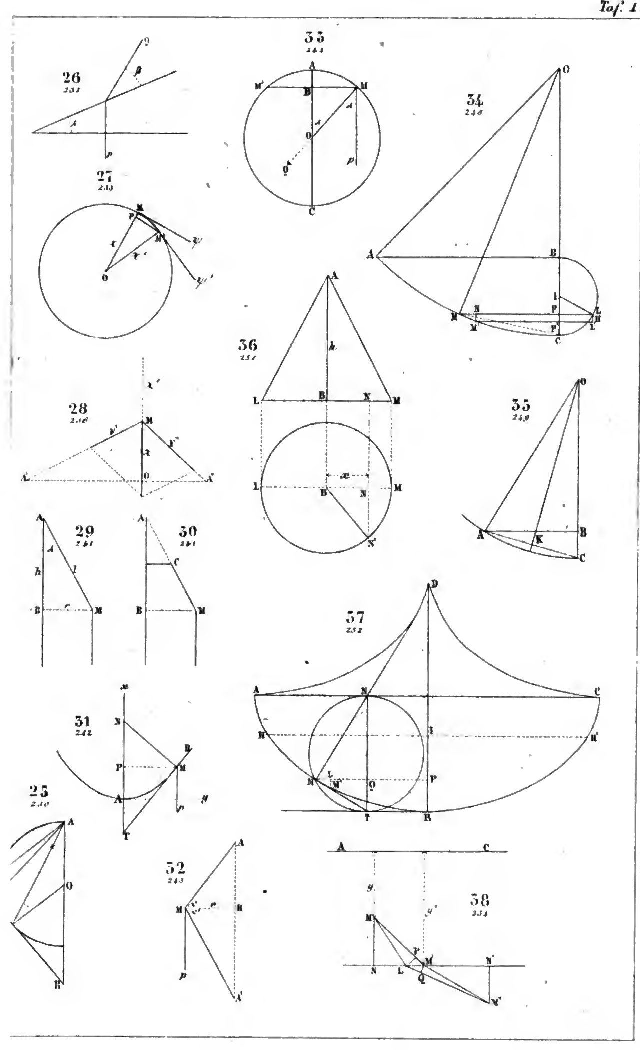
„ 106, „ 3 des Beispiels l. 10°C st. C°10.

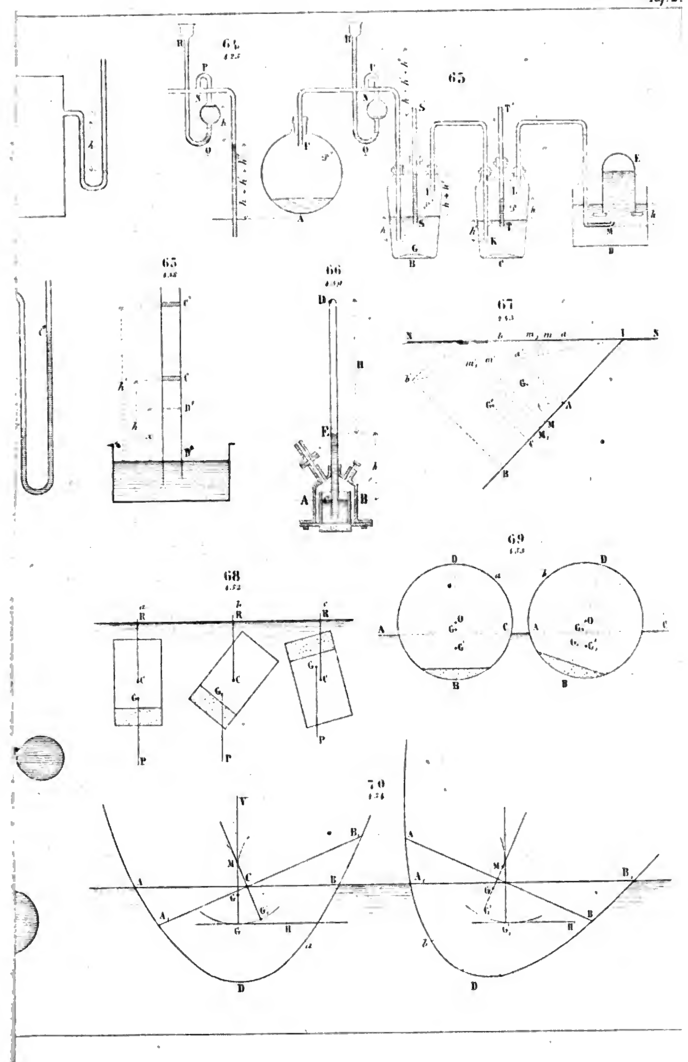
„ 252. In der vorletzten Gleichung soll der Factor vor der Klammer Π st. 𝔓 heißen.

(Bei dieser Gelegenheit sind für die Besitzer der „Grundlehren ꝛc.“ noch die folgenden sinnstörenden Druckfehler, welche dort übersehen wurden, nachzutragen:

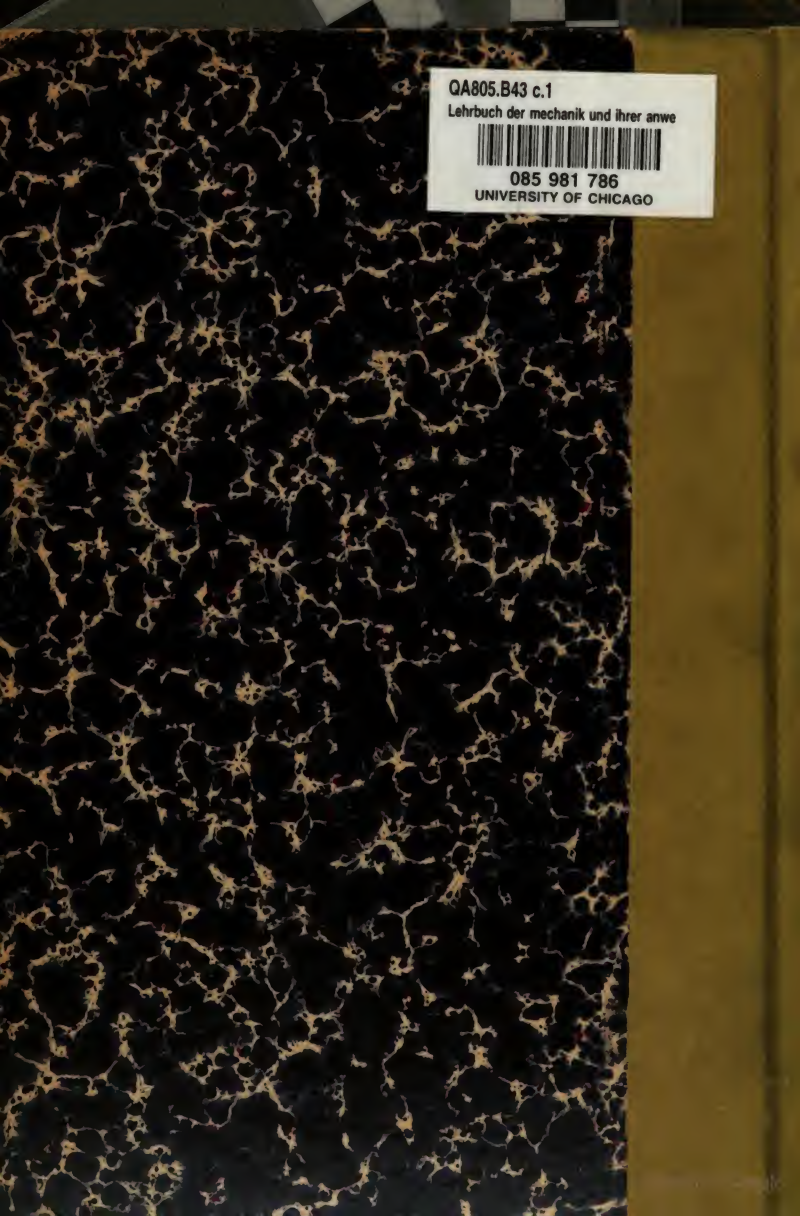
S. VII. Z. 10 v. u. l. Lesern st. Lehrern;

S. 20, Z. 4 der Nr. 43 l. Mantellinien st. Mittellinien.)


26
231
27
233
28
240
29
241
30
241
31
242
25
240
32
243
33
244
34
248
35
249
36
251
37
252
38
254


64
65
65
66
67
68
69
70




QA805.B43 c.1
Lehrbuch der mechanik und ihrer anwe
085 981 786
UNIVERSITY OF CHICAGO